

El Legado Matemático de Leonhard Euler  
a Trescientos Años de su Nacimiento

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

**Dr. José Lema Labadie**

*Rector General*

**Dr. Oscar A. Monroy Hermosillo**

*Rector de la Unidad Iztapalapa*

**Dr. Adrián de Garay Sánchez**

*Rector de la Unidad Azcapotzalco*

**M. en C. José Ángel Rocha Martínez**

*Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Azcapotzalco*

**Dra. Verónica Medina Bañuelos**

*Directora de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Iztapalapa*

**Dr. Mario Pineda Ruelas**

*Jefe del Departamento de Matemáticas, UAM–Iztapalapa*

# El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos Años de su Nacimiento

Alfonso Anzaldo Meneses  
Joaquín Delgado  
Felipe Monroy Pérez  
Editores

“Queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del <<Copyright>>, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendiendo la reprografía y el tratamiento informático”.

***El Legado Matemático de Leonhard Euler a Trescientos años de su Nacimiento***

© 2007, Alfonso Anzaldo Meneses, Joaquín Delgado, Felipe Monroy Pérez

D.R. © 2007 por Innovación Editorial Lagares de México, S.A. de C.V.

Álamo Plateado No. 1, Int. 402  
Fracc. Los Álamos  
Naucalpan, Estado de México  
C.P. 53230  
Teléfono: (55) 5240-1295 al 98  
Email: editor@lagares.com.mx

Diseño de Portada: Alfonso Anzaldo Meneses

ISBN: 978-970-773-375-6

Primera edición octubre, 2007

IMPRESO EN MÉXICO / PRINTED IN MEXICO

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>VII</b>
<b>1. Vida y obra de Leonhard Euler</b>	<b>1</b>
José Luis Huerta Flores y F. Monroy-Pérez	
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. La figura de Leonhard Euler . . . . .	3
1.3. Esbozo biográfico de Leonhard Euler . . . . .	5
1.3.1. Basilea . . . . .	5
1.3.2. San Petersburgo I (1727-1741) . . . . .	7
1.3.3. Berlín (1741-1766) . . . . .	8
1.3.4. San Petersburgo II (1766-1783) . . . . .	9
1.4. Las matemáticas de Euler . . . . .	10
1.5. Opera omnia . . . . .	14
<b>2. El problema de los dos centros fijos</b>	<b>21</b>
Joaquín Delgado y Martha Álvarez Ramírez	
2.1. Euler y el problema de los dos centros fijos . . . . .	22
2.2. Ecuaciones de movimiento . . . . .	23
2.3. La integral de energía . . . . .	24
2.4. La integral de Euler . . . . .	25
2.5. De motu corporis (1766) . . . . .	27
2.5.1. Movimiento hiperbólico . . . . .	29
2.5.2. Movimiento elíptico . . . . .	37
2.5.3. Solución completa . . . . .	40
2.6. Integrales elípticas y lemniscatas . . . . .	42
2.7. El problema de las curvas algebraicas (1768) . . . . .	46
2.7.1. Reducción de la ecuación integral . . . . .	47
2.8. La ecuación integral reducida . . . . .	48
2.8.1. La ecuación integral para $\mu = 2, \nu = 1$ . . . . .	52
2.8.2. La ecuación integral para $\mu = 3, \nu = 1$ . . . . .	53
2.8.3. La ecuación integral para $\mu, \nu$ enteros . . . . .	54

2.9. De motu corporis (1767) . . . . .	54
2.10. La solución de Jacobi de los dos centros fijos . . . . .	57
2.10.1. La ecuación de Hamilton–Jacobi . . . . .	57
2.10.2. Coordenadas elípticas . . . . .	58
<b>3. La hidrodinámica de Euler</b>	<b>65</b>
Jorge A. Esquivel Avila y Marisela Guzmán Gómez	
3.1. Introducción . . . . .	66
3.2. La obra de Euler en mecánica de fluidos . . . . .	67
3.2.1. Descripciones material y espacial . . . . .	69
3.2.2. Conservación de la masa . . . . .	71
3.2.3. Balance de la cantidad de movimiento . . . . .	73
3.2.4. Ecuaciones de Euler . . . . .	76
3.2.5. Ecuación de Bernoulli . . . . .	78
3.2.6. Paradoja de Euler-D'Alembert. . . . .	81
3.3. Un problema del milenio en hidrodinámica . . . . .	83
<b>4. Euler y la cuerda vibrante</b>	<b>91</b>
Gulmaro Corona Corona y Salvador Arellano Balderas	
4.1. Introducción . . . . .	91
4.2. Historia . . . . .	92
4.2.1. Sobre el siglo XVIII . . . . .	92
4.2.2. Antecedentes del problema . . . . .	93
4.2.3. Solución de D'Alembert . . . . .	95
4.2.4. Solución de Euler . . . . .	96
4.2.5. La controversia entre Euler y D'Alembert . . . . .	97
4.2.6. La solución de Daniel Bernoulli . . . . .	98
4.2.7. El trabajo de Lagrange . . . . .	99
4.2.8. Resumen . . . . .	100
4.3. La cuerda vibrante . . . . .	101
4.4. La ecuación de Schrödinger . . . . .	106
<b>5. Euler y la función zeta</b>	<b>113</b>
J. Cruz Sampedro, S. Hernández H. y M. Tetlalmatzi M.	
5.1. Introducción . . . . .	113
5.2. La función zeta y los números primos . . . . .	116
5.3. Irracionalidad y trascendencia . . . . .	127
5.4. Irracionalidad, un método reciente . . . . .	138

<b>6. Euler y la teoría de números</b>	<b>147</b>
V. Janitzio Mejía Huguet y Arturo Cueto Hernández	
6.1. Introducción . . . . .	147
6.2. La teoría de números antes de Euler . . . . .	148
6.3. Euler en la teoría de números . . . . .	155
6.3.1. Números perfectos y amigables . . . . .	155
6.3.2. Números de Mersenne y Fermat . . . . .	159
6.3.3. Generalización del pequeño teorema de Fermat . . . . .	163
6.3.4. Sumas infinitas . . . . .	166
6.3.5. El problema de Basilea . . . . .	170
6.4. Después de Euler . . . . .	172
6.4.1. Números perfectos y primos de Mersenne . . . . .	172
6.4.2. Números de Fermat . . . . .	175
<b>7. Las curvas elásticas de Euler</b>	<b>181</b>
A. Anzaldo-Meneses y C. Romero-Meléndez	
7.1. Introducción . . . . .	181
7.2. Marcos móviles en hipersuperficies . . . . .	183
7.3. El principio máximo de Pontryagin . . . . .	184
7.4. Curvas elásticas en $R_2$ , $S_2$ y $H_2$ . . . . .	185
7.5. El péndulo y las integrales elípticas . . . . .	189
7.6. Elásticas en el plano Euclideo . . . . .	192
7.7. Elásticas en la esfera . . . . .	193
7.8. Elásticas en el plano hiperbólico . . . . .	197
<b>8. El método de los máximos y los mínimos</b>	<b>205</b>
H. N. Núñez Yépez y A. L. Salas Brito	
8.1. Introducción . . . . .	205
8.1.1. El principio de mínima acción. . . . .	208
8.2. El método de los máximos y los mínimos. . . . .	209
8.2.1. El método variacional de Euler. . . . .	209
8.2.2. El cálculo variacional. . . . .	210
8.2.3. La resolución general de problemas variacionales. . . . .	212
8.2.4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange. . . . .	216
8.2.5. La curva de longitud mínima. . . . .	216
8.3. Ejemplos del uso del cálculo variacional. . . . .	217
8.3.1. El principio de mínima acción. . . . .	217
8.3.2. Determinismo versus teleología. . . . .	219
8.4. La descripción cuántica de la realidad. . . . .	219
8.4.1. La amplitud cuántica de 1 a 2. . . . .	220
8.4.2. Integrales de Feynman. . . . .	221
8.4.3. El principio de mínima acción, demostrado. . . . .	222

8.4.4.	La validez del principio de Hamilton. . . . .	223
8.5.	El legado del cálculo de variaciones de Euler. . . . .	223
8.5.1.	La derivada funcional. . . . .	224
8.5.2.	Una serie de potencias funcional. . . . .	226
8.5.3.	Aplicaciones. . . . .	227
8.5.4.	Un poco más de formalidad. . . . .	227
8.6.	Conclusión. . . . .	227
<b>9.</b>	<b>Estabilidad mediante funcionales</b>	<b>231</b>
	L. Aguirre y P. Seibert	
9.1.	Ecuaciones diferenciales ordinarias. . . . .	232
9.2.	Sistemas dinámicos y semidinámicos. . . . .	233
9.3.	Conceptos de estabilidad. Criterio de Lyapunov. . . . .	234
9.4.	Generalización. . . . .	235
9.4.1.	Definiciones y notaciones generales. . . . .	235
9.4.2.	Funciones de Lyapunov. . . . .	236
9.4.3.	Condiciones suficientes para la estabilidad. . . . .	236
9.4.4.	El primer teorema inverso. . . . .	237
9.4.5.	El segundo teorema inverso. . . . .	238
9.4.6.	Acotación. . . . .	240
9.5.	Regiones de transición y conjuntos de permanencia. . . . .	244
<b>10.</b>	<b>Euler y el Análisis Matemático</b>	<b>249</b>
	Jaime Navarro y David Elizarraraz Martínez	
10.1.	Introducción . . . . .	249
10.2.	El concepto de función . . . . .	250
10.3.	Las funciones trascendentes . . . . .	252
10.3.1.	Las funciones logaritmo y exponencial . . . . .	252
10.3.2.	Funciones seno y coseno . . . . .	255
10.4.	Series . . . . .	257
10.4.1.	Series trigonométricas . . . . .	260
10.5.	Aplicación de la fórmula de Euler . . . . .	262
10.5.1.	La Transformada de Fourier . . . . .	263
10.5.2.	La transformada de ventana de Fourier . . . . .	263
10.5.3.	La transformada del wavelet . . . . .	264
10.6.	La fórmula de reconstrucción . . . . .	265
10.7.	Transformadas integrales . . . . .	266
10.7.1.	El kernel . . . . .	267
10.7.2.	El kernel de la transformada del wavelet . . . . .	269
10.8.	Resumen . . . . .	270



<b>11. El papel de Euler en el Análisis Complejo</b>	<b>273</b>
L.F. Reséndis O. y L. M. Tovar S.	
11.1. Introducción . . . . .	273
11.2. Los números imaginarios . . . . .	274
11.3. La función exponencial . . . . .	277
11.4. La $n$ -ésima suma parcial de la exponencial . . . . .	280
11.5. La función gama . . . . .	288
11.6. Las funciones $p$ -circulares . . . . .	295
<b>12. Caminos eulerianos y la fórmula de Euler</b>	<b>305</b>
G. Rodríguez Sánchez y F.J. Zaragoza Martínez	
12.1. Introducción . . . . .	305
12.2. Los puentes de Koenigsberg . . . . .	306
12.2.1. Caminos y circuitos eulerianos . . . . .	307
12.2.2. Gráficas dirigidas eulerianas . . . . .	309
12.2.3. Gráficas mixtas eulerianas . . . . .	310
12.2.4. El problema del cartero chino . . . . .	311
12.2.5. Problemas abiertos . . . . .	313
12.3. La fórmula de Euler . . . . .	317
12.3.1. Gráficas planas . . . . .	317
12.3.2. Poliedros regulares . . . . .	320
12.3.3. Gráficas en otras superficies . . . . .	323
12.3.4. Problemas abiertos . . . . .	326



# Prefacio

La asociación de matemáticas de Estados Unidos<sup>1</sup>, declaró el 2007 como el *año de Euler*, en conmemoración del tricentenario del gran matemático suizo Leonhard Euler, nacido en Basilea el 15 de abril de 1707. Esta declaratoria ha sido acompañada por diversas iniciativas alrededor del mundo que incluyen conferencias, congresos de sociedades científicas, ediciones de libros, visitas guiadas, actividades culturales, conciertos, etc. Sobresale la intensa actividad auspiciada por la academia de ciencias suiza: *Leonhard Eulers 300 Geburtstag-Basel 2007*<sup>2</sup>, que a lo largo del año ha llevado a cabo celebraciones públicas en los países en los que Euler vivió y enseñó, competencias de matemáticas desde el nivel de secundaria, el congreso anual de la academia dedicado a Euler, etc. Se ha publicado una historieta: *Ein Mann, mit dem man rechnen kann*<sup>3</sup>, para acercar la figura de Euler a un público más amplio y la oficina de correos suiza ha cancelado un timbre postal conmemorativo.

La fascinación que produce la vida y la obra de Leonhard Euler no se circunscribe a la comunidad matemática. La historia de un hombre que publicó más de 30 000 páginas durante su vida, más de la mitad de ellas después de haber perdido la vista completamente, es cautivante. Su obra es monumental, no solo es reconocido como el matemático más productivo de todos los tiempos, sino también como el de más popularidad y proyección social, equiparándose históricamente con las figuras de Galileo Galilei, Isaac Newton y Albert Einstein.

Leonhard Euler fue un universalista y un cosmopolita, vivió y enseñó en los principales centros de producción intelectual de su tiempo, reflexionó y escribió sobre grandes temas de su época: construcción y diseño de barcos e instrumentos ópticos, cartografía, astronomía, física, filosofía, música, religión, etc., y por supuesto, matemáticas.

El genio matemático de Euler es incuestionable, mucha de la matemática tal y como se escribe hoy en día se debe a él, existen en la literatura decenas de objetos matemáticos que llevan su nombre: ecuaciones, integrales, números, constantes, dia-

---

<sup>1</sup>MAA. Mathematics Association of America

<sup>2</sup>El tricentenario de Leonhard Euler-Basilea 2007

<sup>3</sup>*Un hombre con quien contar*, Elena Pini (animación), Alice Heyne (investigación) y Andreas K. Heyne (texto).

gramas, ángulos, etc. Incursionó prácticamente en todas las ramas de la matemática que se cultivaron en su tiempo: cálculo, ecuaciones diferenciales, álgebra, teoría de números, cálculo de variaciones, topología, etc., para algunas de estas ramas él trazó los principios fundamentales.

La academia de ciencias suiza estableció en 1907 la *comisión de Euler*, con la encomienda de compilar la obra del gran Euler, incluyendo correspondencia, notas, diarios, manuscritos, etc. La colección fue denominada *Opera Omnia*, y su publicación se inició en 1911, cuenta a la fecha con 76 volúmenes y no ha sido aún concluida, esta obra monumental no tiene paralelo en la historia de la ciencia.

Contrariamente a la imagen de un hombre de ciencias que se recluye y se aísla de todo para producir conocimiento en la soledad de su estudio, Euler fue un genio que abrazó la vida con pasión. Es sabido, a partir de lo que escribieron sobre él sus contemporáneos, que fue un hombre que disfrutó de la vida plenamente: se casó dos veces, procreó y educó a los cinco hijos que le sobrevivieron, procuró siempre el bienestar de su familia, diseñó y construyó juegos científicos para sus hijos y sus nietos, afirmaba que fue sosteniendo a uno de sus bebés en brazos, mientras los otros jugaban a sus pies, como llegó a sus mejores descubrimientos matemáticos, practicó ajedrez más allá del esparcimiento, disfrutó de la música y la literatura, etc.

En el espíritu de rendir un modesto homenaje al gran Euler a los trescientos años de su nacimiento, se publica el presente libro, en el cual se exponen en forma concisa y amena, temas de diversas ramas de la matemática pura y aplicada en la cual la influencia de Leonhard Euler persiste. Los autores de los capítulos son investigadores que cultivan activamente los temas sobre los que escriben. Los conceptos se exponen en forma panorámica y expositiva, con abundantes ejemplos y aplicaciones, sin perder el rigor y la calidad científica. El libro está dirigido a un público amplio, con una cultura matemática mediana, que además de matemáticos y estudiantes de matemáticas, incluye a profesionistas y estudiantes de ingeniería y ciencias. El volumen contiene doce capítulos todos ellos escritos alrededor de la matemática de Euler y su proyección en algunos temas de la matemática contemporánea.

En la contribución de J.L. Huerta Flores y F. Monroy Pérez, se resumen algunos aspectos importantes de la vida de Euler. Dada la magnitud y el alcance de la obra de Euler, se abordan someramente solo aquellos aspectos relacionados con el presente volumen. Se sitúa histórica y geográficamente su época y se resalta el ambiente académico que propició el pleno desarrollo de las capacidades de Euler. También se destaca el perfil humanista de Euler como una constante a lo largo de toda su vida, así como su muy especial interés por incidir en la sociedad de su tiempo desde su quehacer científico. Se resalta que, siendo considerado como maestro en el sentido más amplio de la palabra, su interés en realizar investigación básica fue fundamental en su vida y en el desarrollo de las ciencias modernas. Esto es, la investigación *conditio sine qua non* para la docencia. Además de mencionar algunos de sus logros académicos aún hoy vigentes, se hace referencia específica al estado actual de la edición de sus obras por parte de la academia de ciencias suiza que se inició a principios del siglo

pasado y que está lejos de encontrarse concluida.

El capítulo escrito por J. Delgado y M. Álvarez Ramírez presenta algunos aspectos de la mecánica celeste en los que la influencia del gran Euler ha sido significativa. No hay que olvidar que Euler fue un practicante consumado de la astronomía, visitaba regularmente el observatorio Kunstkamera de San Petersburgo, donde permanecía por prolongadas horas de observación y se involucraba en la construcción y diseño de telescopios. El capítulo presenta una visión autorizada del problema de los dos centros fijos y lleva a cabo una cuidadosa reconstrucción de cálculos originales de Euler, introduce la integral de energía y la llamada integral de Euler y analiza las diferentes soluciones: elípticas e hiperbólicas. Desglosa partes del *motu corporis* de Euler, abundando en el uso de las integrales elípticas y las lemniscatas. Estudia las diferentes soluciones incluyendo las de Jacobi así como las llamadas ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

En el capítulo de J. A. Esquivel Ávila y M. Guzmán Gómez, se hace un detallado estudio histórico de las ecuaciones de Euler de la hidrodinámica para fluidos no viscosos. Es mencionado el gran interés que Euler tuvo por este tema y sus numerosas aportaciones durante toda su vida. A esto hay que añadir la gran importancia práctica de las mencionadas ecuaciones, tan solo los logros de Euler sobre este tema lo hubieran hecho famoso. Euler desarrolló los conceptos básicos para poder enunciar las ecuaciones respectivas, lo cual era un problema nada trivial para cuerpos deformables haciendo a un lado dificultades conceptuales erróneas imperantes en su tiempo. Formuló, por ejemplo, una relación para el balance de la cantidad de movimiento que fue central en el desarrollo ulterior. En sus trabajos fueron sentadas las bases para la posterior teoría cinética de los gases. Además, entre sus logros se encuentra la obtención por vez primera de una ecuación de onda para la propagación del sonido. Sus estudios dejaron numerosas preguntas abiertas que aún hoy en día son estudiadas por su gran relevancia para la descripción de cuerpos deformables.

El capítulo de G. Corona Corona y S. Arellano Balderas introduce otro de los temas clásicos de Euler: la cuerda vibrante. Es reconocido que este problema ha inspirado generaciones enteras de físicos y matemáticos y es considerado como uno de los problemas motores del desarrollo conceptual de la física-matemática, incluyendo lo que hoy en día es llamada la ciencia no-lineal. Los autores proporcionan un interesante recuento histórico incluyendo la controversia D'Alembert-Euler sobre la regularidad de soluciones y el concepto mismo de solución de una ecuación en derivadas parciales. El capítulo desarrolla las ideas de Euler hacia temas contemporáneos de la física-matemática como la ecuación de Schrödinger y temas relacionados

Los trabajos de Cueto y Mejía y de Cruz, Hernández y Tetlamatzi abordan la contribución de Euler a la teoría de números que fue extensísima. Cueto y Mejía colocan en perspectiva los resultados de Euler con los resultados más antiguos descubiertos por los griegos, hindúes y chinos: números amigables y perfectos, primos de Mersenne

(también las pifias históricas) y el pequeño teorema de Fermat. Al final se presentan algunos resultados actuales sobre los primos de Mersenne. Como se sabe, a sugerencia de Goldbach, al principio reticente pero después con gran ímpetu, Euler dedica gran parte de su tiempo a probar resultados no demostrados por Fermat. Cruz, Hernández y Tetlamatzi abordan principalmente los orígenes de la función zeta de Riemann conectada profundamente con los números primos. Esta función es un caso de muchos otros que él planteó en los ahora llamados productos de Euler. Uno de los problemas aún abiertos a nuestra fecha se relaciona con las raíces de esta función que dice: La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es  $1/2$ . Euler consigue probar la irracionalidad de  $\zeta(2)$  entre otras cosas, lo cual se analiza en este capítulo.

En el trabajo de Anzaldo y Romero se presenta una generalización de la curva elástica que se refiere a la forma que una viga delgada toma al ser sometida a una compresión en sus extremos. Ellos consideran las ecuaciones de la elástica en espacios de curvatura constante. A partir de un principio variacional se deducen las ecuaciones cuya solución se obtiene mediante el principio máximo de Pontryagin y los marcos de referencia móviles de Serret–Frenet. Algunas curvas en estos espacios se presentan por primera vez.

En el capítulo escrito por Núñez y Salas, los autores esbozan didácticamente las aportaciones de Euler al cálculo de variaciones. Es mostrado como entendió Euler al principio de mínima acción para resolver numerosos problemas de dinámica y más aún como ley natural básica. Dicho principio fue desarrollado de manera importante por Lagrange, siendo, no obstante, fundamental la contribución de Euler para hacer dichos métodos ampliamente aceptados en medios académicos. Luego de mostrar diversas aplicaciones del cálculo variacional los autores señalan que en Física moderna los métodos variacionales son también de gran importancia, en especial en la formulación de las llamadas integradas de trayectoria de la mecánica cuántica. Este capítulo finaliza con la mención del estudio de la teoría de problemas estocásticos mediante el uso del cálculo funcional estrechamente ligado al cálculo variacional.

Ubicándose en la tradición de los principios variacionales a la manera de Euler, L. Aguirre y P. Seibert presentan un capítulo sobre la función de Lyapunov y la estabilidad de sistemas dinámicos. Los autores exhiben un enfoque novedoso por medio de funcionales, lo que les permite generalizar la teoría a sistemas dinámicos abstractos.

La influencia de Leonhard Euler en el análisis matemático es uno de los ejemplos contundentes de la ubicuidad y la atemporalidad de la obra de un genio, la notación  $f(x)$ , la fórmula mágica  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , los ángulos de Euler, la notación para las series, las funciones trigonométricas, etc., y otras tantas gemas que encontramos en nuestros libros de texto universitarios, se deben a Euler. Los capítulos de J. Navarro y D. Elizarraraz Martínez y de L. Resendis O. y L. M. Tovar, discuten esta influencia. Los primeros abundan sobre el análisis real en tanto que los segundos lo hacen sobre el análisis complejo. Estos dos capítulos presentan en forma amena algunos de los

temas fundamentales del análisis en un contexto histórico, y hábilmente conducen de la mano al lector a terrenos actuales de la investigación como lo son la transformada del wavelet y las funciones  $p$ -circulares.

En el capítulo final del volumen, elegantemente escrito por G. Rodríguez S. y F. Zaragoza M., se presenta uno de los resultados más conocidos de Euler en la teoría de gráficas, conocido como el problema de los puentes de Koenigsberg. Se revisa la teoría de las gráficas eulerianas y generalizaciones como el problema del cartero chino (o el problema chino del cartero). Se presenta también el desarrollo de la fórmula que liga vértices, caras y aristas de un sólido y por qué existen exactamente cinco sólidos platónicos.

La breve reseña de los capítulos del libro que hemos presentado en los párrafos anteriores, deja ver un trabajo de alta calidad académica que conjuga la presentación amena de los conceptos con el rigor científico en torno a la matemática cultivada por Leonhard Euler. Como editores de este volumen queremos agradecer a todos los autores que en forma entusiasta participaron en la elaboración de los capítulos y no nos queda mas que invitar al lector a sumergirse en el mundo fascinante de la figura del gran Euler, y repetir con emoción lo que algun día expresó P. S. Laplace:

*... leéd a Euler; leéd a Euler; que él es el maestro de todos nosotros !*

ALFONSO ANZALDO MENESES  
JOAQUÍN DELGADO JIMÉNEZ  
FELIPE MONROY PÉREZ

Azcapotzalco, México D.F., noviembre de 2007





# Capítulo 1

## Vida y obra de Leonhard Euler

José Luis Huerta Flores <sup>1</sup> y F. Monroy-Pérez <sup>2</sup>

### Resumen

Se presentan en este capítulo algunos aspectos relevantes de la vida y la obra del matemático suizo Leonhard Euler. No se pretende un ensayo biográfico exhaustivo ni una descripción completa de su obra científica, la cual es monumental y de una gran profundidad filosófica. Parte importante de la matemática tal y como se conoce hoy en día, encuentra sus fundamentos en las ideas desarrolladas por Euler. Este capítulo presenta algunos aspectos de estas ideas y el impacto histórico de ellas. Al final se desglosa una descripción de la famosa *Opera omnia*, recolección de la obra de Leonhard Euler a cargo de una comisión de la academia de ciencias suiza.

### 1.1. Introducción

La actividad matemática en el periodo que va del Renacimiento al siglo XVIII se caracteriza, entre otras cosas, por el hecho de que ningún grupo nacional se mantuvo a la cabeza por un tiempo prolongado, como sucedió con la antigua Grecia o con el mundo árabe en la edad media. Del siglo XIV al siglo XVIII, los centros de actividad

---

<sup>1</sup>Area de Análisis Matemático y sus Aplicaciones, Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, hfjl@correo.azc.uam.mx

<sup>2</sup>Area de Análisis Matemático y sus Aplicaciones, Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, fmp@correo.azc.uam.mx

matemática se localizaron entre Alemania, Italia, Francia, Holanda, Inglaterra y Suiza, siendo este último el hogar de la familia Bernoulli, que se registra en la historia de la ciencia como una familia que ha tenido entre sus miembros a un número poco usual de matemáticos y hombres de ciencia de gran calibre [1].

La familia Bernoulli estuvo integrada inicialmente por los hermanos Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748), quienes entre otras cosas hicieron notar el poder del cálculo de Newton y Leibniz y lo aplicaron creativamente a una gran diversidad de problemas. De 1687 hasta su muerte Jacob estuvo a cargo de la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea. En 1697 Johann fue profesor de la universidad de Groningen y a la muerte de su hermano lo reemplazó en su puesto. Los hermanos mantuvieron una permanente comunicación siempre salpicada con una amarga rivalidad.

Johann Bernoulli fue más prolífico que su hermano, pero se distinguió por poseer una personalidad irascible y celosa. Fue reconocido como un gran educador que enriqueció el cálculo y difundió su poder en el resto de la Europa. La historia registra que fueron las lecturas de cálculo de Johann Bernoulli las que se recopilaron en el primer libro de texto de cálculo: *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado en 1696 por el matemático francés Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital, (1661-1704).<sup>3</sup>

Johann Bernoulli procreó tres hijos, Nicolaus (1695-1726), Daniel (1700-1782) y Johann II (1710-1790), todos ellos ganaron reconocimiento como matemáticos y científicos distinguidos del siglo XVIII. Un recuento de la obra de los Bernoulli rebasa los alcances de este capítulo, la literatura sobre esta distinguida familia de científicos es abundante y diversa, al lector interesado recomendamos leer la entrada *Bernoulli* del Diccionario Histórico de Suiza, enciclopedia publicada bajo los auspicios de la Academia Suiza de Humanidades y Ciencias Sociales, y de la Academia Suiza de Historia [2].

El matemático suizo más significativo del siglo XVIII, y sin duda de todos los tiempos, fue Leonhard Euler (1707-1783), nacido en Basilea. En los primeros años de su formación, Euler mantuvo contacto regular con Johann Bernoulli, para ese entonces el matemático más renombrado de toda Europa. Johann Bernoulli reconoció desde el principio el genio matemático de Euler y lo estimuló, considerándolo siempre como su discípulo predilecto, este contacto fue indudablemente decisivo en la formación matemática del gran Euler. Las relaciones de Euler con el clan Bernoulli incluyó la amistad que de por vida mantuvo con los los hermanos Nicolaus y Daniel Bernoulli.

Presentamos en este capítulo algunos rasgos biográficos de Leonhard Euler, y describimos algunos aspectos sobresalientes de su obra matemática, no pretendemos una exposición exhaustiva, ni una contribución enteramente original sino un modesto homenaje al gran Euler en la celebración de su tricentenario.

---

<sup>3</sup>De ahí que el método de Bernoulli para la evaluación de límites de formas indeterminadas por medio de diferenciaciones repetidas sea erróneamente conocido como la regla de l'Hôpital.

## 1.2. La figura de Leonhard Euler

Escribir sobre los aspectos significativos de la vida entera de una persona de la estatura intelectual de Euler puede resultar en una simplificación grosera. Sin embargo, en torno a la vida y obra de Euler existe una buena cantidad de libros ensayos y artículos de una excelente calidad académica que ayudan a emprender con decoro esta tarea.

Sin excluir otras fuentes recomendamos al lector los textos siguientes, los cuales han sido ampliamente consultados en la elaboración de este capítulo: el libro de W. Dunham [3], *Euler, the master of us all*, obra que presenta en forma amena y rigurosa una recolección fina de la vida y obra de Euler. El libro editado por W. Dunham [5], *The genius of Euler, reflexions on his life and work*, publicado por la Asociación Matemática de América, (MAA, por sus siglas en inglés), en ocasión al tricentenario de Euler, texto que conjunta a connotados matemáticos, historiadores y hombres de letras,<sup>4</sup> que han escrito en diferentes épocas, sobre la figura de Euler. El libro de V.S.Varadarajan [6], *Euler through time: a new look at old themes*, texto que presenta la obra matemática de Leonhard Euler en la perspectiva de la matemática contemporánea.

Por otro lado, existe un documento testimonial autobiográfico imprescindible, una suerte de curriculum vitae breve, el cual fue dictado por el mismo Euler a su hijo Johhann Albretch en su segunda estancia en San Petersburgo. Recomendamos ampliamente la lectura de ese documento el cual aparece en el libro de E. A. Fellman [7], en una traducción libre del alemán al inglés.

Leonhard Euler no solamente fue el matemático más productivo de todos los tiempos, sino fue también un cosmopolita en el sentido más amplio del termino, vivió sus primeros veinte años en Basilea, tuvo dos estancias de impresionante actividad científica en San Petersburgo por más de treinta años y vivió un cuarto de siglo en Berlin. La fama mundial que Euler alcanzó en vida puede ser comparada con la que en su momento gozaron Galileo, Newton o Einstein.

Aunque en la mitad de su vida llegó a ser un hombre rico, mantuvo siempre una presencia sencilla y una vida modesta en cuanto al aspecto material. Profesó ortodoxamente su religiosidad, manteniendo siempre una actitud tolerante y una honestidad intelectual a toda prueba. Contrariamente a las costumbres de algunos de los científicos de su tiempo, nunca se envolvió en disputas sobre la autoría de resultados matemáticos y más aun se distinguió por su generosidad en este aspecto.

La producción monumental de Euler está ligada a su prominente memoria y a su poderosa capacidad de concentración. Es sabido que aun a edad avanzada podía deleitar reuniones familiares recitando literalmente de memoria, cualquier verso de la *Aneida* de Virgilio, y que recordaba a pie juntillas minutas de reuniones de la Academia años después de celebradas, por no mencionar el poder de cálculo matemático que podía llevar mentalmente para después dictarle a sus colegas. Su amigo D.

<sup>4</sup>El texto incluye entre otros, ensayos de C. Truesdell, A. Weyl y G. Polya.

Thiébauld (1733-1807), hombre de letras francés, lo describió como alguien que puede realizar impresionantes cálculos mentales ...*con un niño en sus rodillas y un gato sobre sus hombros*,...

El siglo XVIII bien puede considerarse, matemáticamente hablando, el siglo de Euler, la matemática que se cultivó durante el siglo XIX giró, en buena medida en torno a la obra de Euler. Incluso en la actualidad, algunos de los temas que él trató y sobre los cuales dilucidó las ideas seminales, siguen generando interés. Entre los temas que Euler estudió, para algunos de los cuales él sentó los fundamentos deben incluirse entre otros, el cálculo diferencial e integral, el cálculo de variaciones, las funciones logaritmo, exponencial y trigonométricas, las ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias, las funciones e integrales elípticas, las integrales hipergeométricas, la teoría de números y el álgebra, las series y productos infinitos, la mecánica de partículas y de cuerpos sólidos, la óptica, la hidrostática, la hidrodinámica, la astronomía, la topología y la teoría de gráficas, ver [6].

El quehacer matemático de Euler estuvo siempre ligado a la ciencia aplicada y a la ingeniería de su tiempo. Fue el fundador de la mecánica analítica, calculó el efecto perturbativo de cuerpos celestes sobre la órbita de un planeta, calculó las trayectorias de proyectiles en diversos medios. Su teoría sobre el oleaje marino y sobre el diseño de barcos, ayudó significativamente a la navegación de su época.<sup>5</sup> Estudió la acústica, la propagación del sonido y la teoría musical. Contribuyó al diseño de instrumentos ópticos, de telescopios y microscopios. Aplicó la ecuación diferencial del movimiento de un fluido ideal, descubierta por él mismo, al estudio del flujo sanguíneo en el cuerpo humano. La química, la geografía y la cartografía no le fueron ajenas, realizó un mapa de Rusia. Escribió textos sobre mecánica, álgebra, análisis, geometría analítica y diferencial, cálculo de variaciones, etc. Su nombre aparece en diversas ramas de la matemática, hay fórmulas de Euler, polinomios de Euler, constantes de Euler, integrales Eulerianas, etc. [8].

Euler se distinguió también como un gran comunicador del conocimiento científico, como lo demuestra la colección de cartas que envió a la princesa de Anhalt Dessau con el propósito de instruirla en aspectos básicos de la ciencia y la filosofía. Estas cartas fueron escritas en francés, para entonces lengua franca de la realeza europea, y fueron compiladas por primera vez por los matemáticos franceses Silvestre François Lacroix (1765-1843), y Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat Condorcet (Marquis de Condorcet, 1743-1794) bajo el título: *Lettres à une princesse d'Allemagne. Sur divers sujets de physique et de philosophie*. Desde entonces ha sido traducido a varios idiomas y es sin lugar a dudas uno de los textos más populares de lo que hoy llamamos divulgación científica.

Podría esperarse que la actividad científica de Euler reflejada en miles de páginas diseminadas en libros, memorias, ensayos, cartas y artículos de investigación, se realizó a expensas de otros intereses y gracias a un enorme sacrificio personal. Nada más

<sup>5</sup>Escribió dos tratados completos sobre el tema, *Scientia Navalis*, (1749). *Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux*, (1773).

lejos de la verdad, puede afirmarse que Leonhard Euler fue un individuo que vivió y gozó la vida en todo su esplendor. Mantuvo relaciones de amistad personal más allá del quehacer intelectual con artistas, hombres de letras y científicos, incluyendo desde luego a los Bernoulli. Fue admirador de la literatura francesa y polemizó con filósofos de la talla de Voltaire y d'Alembert. Encontró tiempo para socializar con la realeza rusa y prusiana de su época. En una carta enviada a su amigo, el religioso suizo Johann Kaspar Wettstein (Basilea, 1695-1759), con quien sostuvo un abundante intercambio epistolar<sup>6</sup>, puede leerse: *“En cuanto a mi investigación puedo hacer lo que yo quiero,..., los reyes me llaman su profesor y yo pienso que soy el hombre más feliz del mundo”*, frase que refleja el estado espiritual de Euler.

Vivió un matrimonio de cerca de cuarenta años con su primera esposa, Katharina Gsell, hija de un pintor suizo, con quien procreó trece hijos de los cuales sólo cinco sobrevivieron<sup>7</sup>, contrajo segundas nupcias con su cuñada poco después de enviudar, procuró

siempre el bienestar de su familia, diseñó y construyó juegos científicos para sus hijos y nietos. Practicó ajedrez más allá del esparcimiento. En una carta dirigida a su amigo, el matemático Prusiano Christian Goldbach, (Königsberg, 1690-1764), se lee: *...por aquí el ajedrez es jugado apasionadamente, estoy tomando lecciones con alguien que juega extremadamente bien, pero estoy llegando al punto de ganarle la mayoría de las partidas*, en otro momento le describe el llamado Knight's Tour: *... un caballo debe moverse por los 64 cuadrados del tablero de ajedrez de tal forma que cada cuadrado es visitado una sola vez*<sup>8</sup>.

### 1.3. Esbozo biográfico de Leonhard Euler

Describimos en esta sección algunos rasgos biográficos relevantes de Euler en las cuatro etapas de su vida: Basilea, Suiza en el periodo de 1707 a 1727, primera estancia en San Petersburgo, en el periodo de 1727 a 1741, ingreso a la Academia de Ciencias de Berlín, Prusia en el periodo de 1741 a 1766, y la segunda estancia en San Petersburgo del año 1766 hasta su muerte en 1783.

#### 1.3.1. Basilea

Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 cerca de Riehen, caserío pintoresco en los límites de la municipalidad de Basilea, una de las trece repúblicas que integraban la Suiza de esa época. Casi nada se sabe sobre su madre, Margaretha Bruckner

<sup>6</sup>La correspondencia completa entre L. Euler y J. K. Wettstein, se puede consultar en inglés en <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/correspondence>

<sup>7</sup>Euler afirmaba que fue sosteniendo a uno de sus bebés en brazos, mientras los otros jugaban a sus pies, como llegó a sus mejores descubrimientos matemáticos.

<sup>8</sup>Euler estaba así formulando a través del juego, el problema de los caminos Hamiltonianos sobre gráficas.

(1677-1761), salvo que descendía de una familia de académicos y religiosos. Su padre Paulus Euler<sup>9</sup> (1670-1745), estuvo enrolado en la Universidad de Basilea y al término de los estudios propedéuticos, *studium generale*, eligió la teología (protestante) como su campo de estudio en la Facultad de Filosofía. En 1693 obtuvo el *sacri ministerii candidatus*, y se convirtió en el Ministro de Riehen. Se involucró en buena medida en la actividad matemática de su época, por ejemplo en 1688 participó en el debate *Positiones mathematicae de rationibus et proportionibus*, conducido por Jacob Bernoulli.

Paulus Euler dio a su hijo sus primeras enseñanzas, básicamente latín y griego, y lo alentó en el estudio de las matemáticas que desde temprana edad apasionaron al pequeño Leonhard. A los trece años se enroló en la universidad y en el primer bienio atendió el curso obligatorio de matemáticas dictado por Johann Bernoulli, que incluía entre otros temas geometría y aritmética práctica y teórica. En esta época Euler recitó en latín un discurso a sus compañeros estudiantes, titulado *declamatio: de arithmetica et geometria*, donde mostró evidencia de su solvencia en latín y su innato talento matemático.

Para satisfacer los deseos de su padre estudió teología en la Facultad de Filosofía, lo que le permitió un contacto más cercano con Johann Bernoulli<sup>10</sup> y sus hijos Nicolaus, Daniel y Johann I, con quienes mantuvo una amistad duradera. Indudablemente este contacto fue estimulante en el futuro Euler, en su recolección autobiográfica puede leerse el siguiente párrafo<sup>11</sup>:

En 1720 fuí admitido en la Universidad como estudiante público, donde pronto encontré la oportunidad de lograr la cercanía con el famoso profesor Johann Bernoulli, quien tuvo la gentileza de ayudarme en las ciencias matemáticas. Por sus múltiples compromisos, él descartó categóricamente lecciones privadas: sin embargo, me dio un consejo aún más benéfico, el cual consistió en que yo revisara por mi cuenta algunos de los libros más difíciles de matemáticas y trabajara sobre ellos con diligencia, y dondequiera que yo encontrara alguna objeción o dificultad, él me ofreció libre acceso a él cada sábado por la tarde, y tuvo la amabilidad de dilucidar sobre las dificultades recolectadas, esto sucedió con tal ventaja que cuando él resolvía una de mis objeciones otras diez desaparecían al instante, lo cual es ciertamente el mejor método para avanzar sostenidamente en las ciencias matemáticas.

Euler completó sus estudios en 1726 e inició sus investigaciones independientes inmediatamente. Publicó sus primeros dos ensayos científicos a los 18 y 19 años, sobre de uno de estos trabajos iniciales publicado en el *acta eruditum* de Leipzig, Bernoulli

<sup>9</sup>La raíz del nombre EULER, pronunciado *oiler* proviene del vocablo germánico *ouwe*, pequeña pradera húmeda, y *ouweler*, propietario de tal pradera.

<sup>10</sup>Para entonces ya considerado el indiscutible *princeps mathematicorum*, después de la muerte de Leibniz (1716), y el retiro de Newton.

<sup>11</sup>Traducción libre del inglés al español por parte de los autores de este capítulo.

describió proféticamente a Euler como . . . *un joven que posee el más afortunado de los talentos, hemos visto la sencillez y la pericia con las que él ha penetrado los campos más secretos de las matemáticas sobre nuestros auspicios.*

### 1.3.2. San Petersburgo I (1727-1741)

A principios del siglo XVIII, Rusia, bajo la dirección del Zar Pedro I, el grande, está en franca expansión. En 1724 toma la decisión de fundar la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Para ello trae a personalidades de diferentes países de Europa. Su idea es crear una academia que pueda rivalizar con las academias de París y Berlín. En 1727 Euler llega a la Academia, donde se encuentra con sus compatriotas de Basilea, Jacob Hermann y Daniel Bernoulli y meses más tarde conoce al matemático y diplomático Christian Goldbach (1690-1764). En diciembre de ese año Goldbach plantea a Euler la afirmación de Pierre Fermat (1601-1655) de si los números de la forma  $2^{2^{p-1}}$ ,  $p$  primo son también primos, lo que acerca a Euler a los trabajos de Fermat en teoría de números. La extensa correspondencia que hubo entre Euler y Goldbach a lo largo de 35 años, deja ver a este último como un excelente matemático inspirador.

De París, invitado personalmente por el Zar Pedro I, llega el célebre astrónomo y geógrafo Joseph-Nicolás Delisle (1688-1768) a establecer el Observatorio de San Petersburgo. Años más tarde dirigirá el Departamento de Geografía de la Academia. Delisle, considerado como el fundador de la Escuela Astronómica de San Petersburgo, invita en 1735 a Euler a colaborar con él en varios proyectos cartográficos.

En el año 1734 Euler anuncia uno de sus primeros triunfos que le dan una gran solidez a su reputación como genio matemático al obtener la suma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta suma ya la habían intentado Pietro Mangoli (1625-1686), los hermanos Bernoulli, Jacob y Johann y G.W. Leibniz. En esta época Euler utilizaba el símbolo  $p$  para el número  $\pi = 3.14159265\dots$ , pero en esa ocasión utilizó el símbolo  $c$  que era el que su maestro Johann Bernoulli usaba. Más tarde, en su libro *Introductio in analysin infinitorum* (1748) utiliza el símbolo  $\pi$  mismo que seguimos usando hasta el día de hoy.

Notas y diarios de Leonhard cuando tenía entre 18 y 19 años muestran que la mecánica era una de sus pasiones. Los récords de diez años del Observatorio de San Petersburgo muestran que Euler estaba entre las personas que regularmente tomaban medidas. Estas observaciones permitieron a Delisle y Euler precisar el instante del medio día. Sin duda Euler dominó los métodos de la observación astronómica. En 1735 Euler publica *Computandi aequationen meridiani*.

A Euler le fascinaban las manchas solares. El método de Delisle usado para el cálculo de las trayectorias de las manchas solares es considerado como el comienzo

de la mecánica celeste. La biblioteca privada de Delisle muestra que Euler le ayudó a determinar las trayectorias de cometas utilizando métodos analíticos. Para el año de 1736 Euler hace su tratado de *Mechanica* en dos volúmenes: en el primer volumen se habla del movimiento libre de una masa puntual en el vacío y en un medio con fricción, mientras en el segundo se estudia el movimiento forzado de una masa puntual, movimiento de un punto en una superficie, teoría de superficies y geodésicas.

### 1.3.3. Berlín (1741-1766)

La situación de inestabilidad política en Rusia y la muerte de Catalina I en 1740 hace que Euler acepte la invitación de Federico II de Prusia, para dirigir la academia prusiana de ciencias. Euler es recompensado generosamente por la academia de San Petersburgo de la cual continua como miembro. Durante los siguientes 25 años, Euler enviará la mitad de sus artículos a San Petersburgo para su publicación. Más de 100 memorias fueron enviadas a esta ciudad mientras se publicaron otras 125 en Berlín.

En 1740 Philip Naudé (1684-1747) cuestiona a Euler sobre el número de maneras en las que un entero dado puede ser representado como una suma de enteros. Este problema de la *partitio numerorum* y otros relacionados hacen que Euler desarrolle toda una teoría de números en la década de 1740 a 1750. En esta teoría obtiene una fórmula para números primos.

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}, p \text{ primo}$$

En Berlín se publican varias de sus obras maestras. La aparición de *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (1744) es todo un acontecimiento en el desarrollo del Cálculo de Variaciones. El libro contiene la ecuación de Euler

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$$

fórmula que apareció desde 1736. De acuerdo con Constantin Carathéodory (1873 - 1950), editor de este libro, como parte de la Opera Omnia es uno de los trabajos más bellos que se hayan escrito. En el libro hacen su aparición una clase de superficies notables, las llamadas superficies minimales. El libro titulado *Introductio in analysin infinitorum* (1744) es otra obra que va a tener gran influencia a lo largo del siglo XIX. En el primer volumen se discute ampliamente el concepto de función, mientras que en el segundo hay una clara y bella exposición de las funciones circulares, exponenciales y logarítmicas. Un segundo tratado de mecánica aparece en 1765, la mecánica del cuerpo sólido, *Theoria motus corporum solidorum* donde aborda con un nuevo enfoque la mecánica puntual destacándose el poder de los vectores. Las ecuaciones de Euler para el movimiento de un cuerpo rígido aún hoy en día está entre los ejemplos de sistemas dinámicos en un grupo de Lie.



Cuando Euler llega a Berlín se encuentra en la presidencia de la academia a Pierre-Louis Moreau de Maupertius (1658-1759). Euler mantuvo una relación cordial con Maupertius y estuvo siempre en la mejor disposición de colaboración con las responsabilidades de la academia. A la muerte de Maupertius, Euler ocupa de facto la presidencia de la academia, tomando responsabilidades que iban desde administrar presupuesto hasta vigilar invernaderos. Sin embargo el Rey Federico II nunca le reconoció título alguno a Euler como presidente de la academia de ciencias.

El Rey prusiano no sentía ningún afecto hacia Euler, incluso se refirió a él de manera despectiva como su cíclope matemático, haciendo una cruel referencia a la pérdida de su ojo derecho en el año de 1738. Federico II ofreció a Jean Le Rond D'Alembert la presidencia de la academia de ciencias, y d'Alembert accede a entrevistarse con el Rey en Berlín, pero no para aceptar el ofrecimiento, sino para recomendarle a Euler como la persona idónea que debe ocupar el cargo.

Todo esto hace que Euler tome la decisión de salir de Berlín, y envíe una carta al secretario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, solicitando su regreso. En un principio Federico rechaza la solicitud de Euler, sin embargo, es muy fuerte la presión que ejerce la Zarina Catalina II, quien deseaba restaurar la Academia de Ciencias de San Petersburgo

#### 1.3.4. San Petersburgo II (1766-1783)

Euler quedó casi totalmente ciego en 1771. Alrededor de 400 memorias fueron escritas en esta segunda estancia a su regreso en San Petersburgo, lo que vendría a componer casi la mitad de su obra.

En este periodo, Euler tiene varios colaboradores, entre ellos su hijo Johann Albrecht. Sin duda, las bases para el logro de tal hazaña fueron su memoria prodigiosa y una formidable capacidad para hacer grandes cálculos. En esta época completó su trabajo sobre el movimiento de la luna y aparecen tres libros: *Dioptrica* (1769-1771), tres volúmenes de *Institutiones calculi integralis* (1768-1770) y su tratado de Álgebra *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770).

Euler, según algunos críticos, parece ignorar el concepto de convergencia, sin embargo en su último artículo de 1783, el año de su muerte, contiene el germen del concepto de convergencia uniforme. Su ejemplo fue utilizado por Niels Henrik Abel (1802-1829) en 1826

Su esposa Catalina muere en 1773, y tres años más tarde se casa con su cuñada Abigail Gsell. Euler muere de una hemorragia cerebral en 1783. El día de su muerte todavía hizo cálculos sobre el planeta Urano, descubierto el 13 de marzo de 1781 por William Herschel. En su mesa de trabajo habían cálculos matemáticos relativos al vuelo de globos, estimulado quizá por las noticias acerca del ascenso de globos por aire caliente.

Sus restos están ahora en el cementerio de San Lázaro, en el monasterio Alexandre Nevski en San Petersburgo colocados cerca de la tumba de Mijaíl Vasílievich

Lomonósov (1711-1765)

A manera de resumen dibujamos en forma sucinta la línea del tiempo de los momentos relevantes de la vida de Euler como lo plantea V.S. Varadarajan. Es importante tener en mente lo que a continuación describimos:

- 1707 Nace Leonhard Euler en Abril 15 en Basilea, Suiza.
- 1725 Se establece la Academia de Ciencias de San Petersburgo, a iniciativa del Zar Pedro el Grande.
- 1727 Euler se establece en San Petersburgo como profesor adjunto de matemáticas, a invitación de los Bernoulli.
- 1733 Daniel Bernoulli regresa a Basilea y Euler ocupa la Cátedra de Matemáticas. Euler contrae matrimonio y compra una casa.
- 1735 Euler resuelve el problema de la suma de la serie  $\sum \frac{1}{n^2}$ , y adquiere una reputación internacional.
- 1738 Pierde la visión del ojo derecho después de una enfermedad.
- 1741 Revuelta política en Rusia. Euler deja San Petersburgo, se establece en Berlín como miembro de la academia de ciencias de Berlín.
- 1762 Catherine II toma el poder en Rusia e inicia gestiones para traer de regreso a Euler a San Petersburgo.
- 1766 Euler regresa a San Petersburgo y su vista comienza a deteriorarse.
- 1771 Euler queda casi completamente ciego.
- 1783 Euler muere en San Petersburgo el 18 de Septiembre.

## 1.4. Las matemáticas de Euler

Compilar en forma completa las contribuciones de Euler a las matemáticas rebasa los alcances de este capítulo, mencionaremos algunos aspectos que consideramos relevantes y recomendamos al lector el *glosario euleriano* presentado por diversos autores, incluyendo el consejo editorial de *Mathematics Magazine* publicada por la MAA [9]. Aunque muchos de los símbolos usados actualmente no llevan su nombre, no podemos dejar de mencionar que fue él quien introdujo  $f(x)$  para las funciones,  $\Sigma$  para las sumatorias,  $\Delta x, \Delta^2 x, \dots$  para los incrementos,  $i$  para  $\sqrt{-1}$ ,  $e$  para la base de los logaritmos naturales, etc.

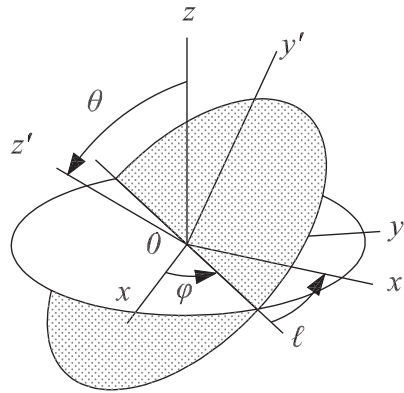


Figura 1.1: Ángulos de Euler

**Los ángulos de Euler.**

Son los ángulos que se usan para fijar las direcciones de un sistema de coordenadas nuevo  $(x', y', z')$  con respecto a uno viejo  $(x, y, z)$ . Se define la *línea nodal*  $\ell$  como la intersección entre los planos  $x'y'$  y  $xy$ . Los ángulos son los siguientes: el ángulo entre los ejes  $z$  y  $z'$ , el ángulo entre el eje  $x$  y la línea  $\ell$  y el ángulo entre el eje  $x'$  y la línea  $\ell$ . (Ver figura, teorema de Euler para la rotación de sistemas coordenados).

**La característica de Euler.**

Para un poliedro se define el número

$$\xi = V - E + F,$$

donde  $V$  es el número de vértices,  $E$  el número de aristas y  $F$  el número de caras. De forma más generalizada, para un complejo simplicial  $n$ -dimensional  $K$  la característica de Euler (o Euler-Poincaré) está definida por:

$$\xi = \sum_{i=0}^n (-1)^i s(i)$$

donde  $s^i$  es el número de simplejos  $i$ -dimensionales en  $K$

**La constante de Euler.**

Se define como el límite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right),$$

Euler calculó este número con 16 decimales, cabe mencionar que a la fecha no se sabe si  $\gamma$  es un número irracional. Este número puede también ser definido por medio de la siguiente integral

$$\gamma = \int_{\infty}^0 e^{-t} \ln t \, dt.$$

**Los números de Euler  $E_n$ .**

Se definen por medio de la siguiente serie

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

**Los números de Euler  $A_{n,k}$ .**

Si  $H_n(\lambda)$  es la función racional de  $\lambda$  definida por la función generadora

$$\frac{1-\lambda}{e^t-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad \lambda \neq 1,$$

entonces los números de Euler  $A_{n,k}$  se definen por el polinomio

$$(\lambda-1)^n H_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n A_{n,k} \lambda^{k-1}.$$

**La primera integral de Euler, (la función beta)**

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

**La segunda integral de Euler, (la función Gamma)**

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

estas funciones están relacionadas

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

### Polinomios de Euler

Los polinomios  $E_n(x)$  están definidas por el desarrollo de la función

$$\frac{2te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < \pi$$

Los polinomios de Bernoulli son definidos por la función generadora,

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

hay muchas ecuaciones que relacionan  $E_n(x)$  y  $B_n(x)$ . Algunas propiedades de los polinomios de Euler son las siguientes:

$$\begin{aligned} E'_n(x) &= nE_{n-1}(x), \\ E_n(x+1) + E_n(x) &= 2x^n \\ \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} k^n &= \frac{1}{2}(E_n(m+1) + (-1)^m E_n(0)) \end{aligned}$$

### Productos de Euler.

Bajo ciertas condiciones, las series de Dirichlet:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

$s$  real o complejo, tienen una representación como producto formal como:

$$F(s) = \prod_{\text{primos}} F_p(s),$$

llamado producto de Euler; las funciones

$$F_p(s) = 1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + f(p^3)p^{-3s} + \dots$$

son llamados factores de Euler. El primer ejemplo es la función zeta, para la cual  $f(n)$  es la función constante 1 (ver abajo identidad de Euler). Otro ejemplo derivado de esto es:

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} &= \prod_p \left( \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-2s}} \right) = \prod_p \left( 1 + \frac{1}{p^s} \right) \\ &= \prod_p (1 - p^{-s} + p^{-2s} - p^{-3s} + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s},\end{aligned}$$

donde  $\lambda(n) = (-1)^\rho$ , con  $\rho$  definida como  $\sum_{i=1}^k \alpha_i$  si  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$  es la factorización en primos de  $n$

#### Función $\Phi$ de Euler.

Para cada entero positivo  $n$ ,  $\Phi(n)$  es definido como el número de enteros positivos menores que  $n$ , primos relativos con  $n$ . Si  $p_1, p_2, \dots, p_k$  son los distintos factores primos de  $n$ , entonces

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left( 1 - \frac{1}{p_i} \right).$$

#### Identidad de Euler (Función zeta).

Para  $R(s) > 1$ ,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

el producto tomado sobre todos los números primos.

## 1.5. Opera omnia

**Leonhardi Euleri Opera Omnia.** Edición de la obra de Leonhard Euler a cargo de la comisión Euler de la Academia de Ciencias Suiza, en colaboración con distinguidos especialistas de todo el mundo. Este trabajo inició en 1911 y está cerca de ser concluido. Originalmente fue publicado por la casa editorial de B.G. Teubner de Leipzig y Berlin, y en la actualidad es publicado por la editorial Birkhäuser de Boston y Basilea.

**Series prima:** *Opera mathematica*.

Esta es la serie I, contiene los trabajos de lo que puede llamarse matemáticas puras. Esta serie consta de 29 volúmenes.

*Vollständige Anleitung zur Algebra.*

I-1 (651 páginas, 1911). Ed. Heinrich Weber, con suplementos de

Joseph Louis Lagrange.

*Commentationes arithmeticae*. Contribuciones a la teoría de los números.

I-2 (611 páginas, 1915). Ed. Ferdinand Rudio.

I-3 (543 páginas, 1917). Ed. Ferdinand Rudio.

I-4 (431 páginas, 1941). Ed. Rudolf Fueter.

I-5 (374 páginas, 1944). Ed. Rudolf Fueter.

*Commentationes algebraicae ad theoriam aequationum pertinentes*.

I-6 (509 páginas, 1921). Eds. Ferdinand Rudio, Adolf Krazer y

Paul Stäckel.

*Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*.

I-7 (580 páginas, 1923). Ed. Louis Gustave du Pasquier.

*Introductio in Analysin Infinitorum*.<sup>12</sup>

I-8 (392 páginas, 1922). Eds. Ferdinand Rudio, Adolf Krazer.

I-9 (403 páginas, 1945). Eds. Andreas Speiser.

*Institutiones calculi differentialis*.

I-10 (676 páginas, 1913). Ed. Gerhard Kowalwski.

*Institutiones calculi integralis*.<sup>13</sup>

I-11 (462 páginas, 1913). Eds. Friedrich Engel y Ludwig Schlesinger.

I-12 (542 páginas, 1914). Eds. Friedrich Engel y Ludwig Schlesinger.

I-13 (508 páginas, 1914). Eds. Friedrich Engel y Ludwig Schlesinger.

*Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes*. Contribuciones a la teoría de series y productos infinitos, valores de zeta y temas relacionados.

I-14 (617 páginas, 1925). Eds. Carl Boehm y Georg Faber.

I-15 (722 páginas, 1922). Ed. Georg Faber.

I-16-1 (355 páginas, 1933). Ed. Carl Boehm.

I-16-2 (332 páginas, 1935). Ed. Carl Boehm.

*Commentationes analyticae ad theoriam integralium pertinentes*.

I-17 (457 páginas, 1914). Ed. August Gutzmer.

I-18 (475 páginas, 1920). Eds. August Gutzmer y

Alexander Liapounoff.

I-19 (494 páginas, 1932). Eds. Alexander Liapounoff, Adolf Krazer y

Georg Faber.

*Commentationes analyticae ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes*. Trabajos relacionados con las integrales elípticas.

I-20 (371 páginas, 1912). Ed. Adolf Krazer.

I-21 (380 páginas, 1913). Ed. Adolf Krazer.

<sup>12</sup>Existe una traducción al inglés de estos dos volúmenes titulada: *Introduction to Analysis of the infinite, Book I, (1988), Book II (1990)*. Traducida por J.D. Blanton y publicada por Springer-Verlag.

<sup>13</sup>Existe una traducción al inglés de la primera parte titulada: *Foundations of Differential Calculus*. Traducida por J.D. Blanton y publicada por Springer-Verlag, 2000.

*Commentationes analyticae ad theoriam aequationum differentialium pertinentes.* Trabajos relacionados con las ecuaciones diferenciales.

I-22 (420 páginas, 1936). Ed. Henri Dulac.

I-23 (455 páginas, 1938). Ed. Henri Dulac.

*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutione problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Trabajos relacionados con el cálculo de variaciones.

I-24 (308 páginas, 1952). Ed. Constantin Carathéodory.

*Commentationes analyticae ad calculum variationum pertinentes.* Trabajos relacionados con el cálculo de variaciones.

I-25 (343 páginas, 1952). Ed. Constantin Carathéodory.

*Commentationes geometricae*

I-26 (362 páginas, 1952). Ed. Andreas Speiser.

I-27 (400 páginas, 1954). Ed. Andreas Speiser.

I-28 (381 páginas, 1955). Ed. Andreas Speiser.

I-29 (488 páginas, 1956). Ed. Andreas Speiser.

**Series secunda:** *Opera mechanica et astronomica.*

Esta es la serie II, contiene los trabajos dedicados a la astronomía y a la mecánica.

Esta serie consta de 31 volúmenes.

*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*

II-1 (417 páginas, 1912). Ed. Paul Stäckel.

II-2 (460 páginas, 1912). Ed. Paul Stäckel.

*Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus qui in huiusmodi corpora cadere possunt accommodata*

II-3 (327 páginas, 1948). Ed. Charles Blanc.

II-4 (359 páginas, 1950). Ed. Charles Blanc.

*Commentationes mechanicae*

II-5 (326 páginas, 1957). Ed. Joachim Otto Fleckenstein.

*Commentationes mechanicae ad theoriam motus punctorum pertinentes*

II-6 (302 páginas, 1957). Ed. Charles Blanc.

II-7 (326 páginas, 1958). Ed. Charles Blanc.

*Mechanica corporum solidorum*

II-8 (417 páginas, 1965). Ed. Charles Blanc.

II-9 (441 páginas, 1968). Ed. Charles Blanc.

*Commentationes mechanicae ad theoriam flexibilium et elasticorum pertinentes*

II-10 (451 páginas, 1947). Eds. Fritz Stüssi y Henri Favre.

II-11-1 (383 páginas, 1957). Eds. Fritz Stüssi y Ernst Trost.

II-11-2 (435 páginas, 1960). Ed. Clifford Ambrose Truesdell.

*Commentationes mechanicae ad theoriam fluidorum pertinentes*

II-12 (288 páginas, 1954). Ed. Clifford Ambrose Truesdell.

II-13 (375 páginas, 1955). Ed. Clifford Ambrose Truesdell.



*Neue Grundsätze der Artillerie*

II-14 (484 páginas, 1922). Ed. Friedrich Rober Sherrer.

*Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes*

II-15 (318 páginas, 1957). Ed. Jakob Ackeret

II-16 (327 páginas, 1979). Eds. Charles Blanc y Pierre de Haller.

II-17 (312 páginas, 1982). Eds. Charles Blanc y Pierre de Haller.

*Scientia navalis*

II-18 (427 páginas, 1967). Ed. Clifford Ambrose Truesdell.

II-19 (459 páginas, 1972). Ed. Clifford Ambrose Truesdell.

*Commentationes mechanicae et astronomicae ad scientiam navalem pertinentes*

II-20 (275 páginas, 1974). Ed. Walter Habicht.

II-21 (241 páginas, 1978). Ed. Walter Habicht.

*Theoria motuum lunae, nova methodo pettractata.*

II-22 (412 páginas, 1958). Ed. Leo Courvoisier.

*Sol et luna.*

II-23 (336 páginas, 1969). Ed. Joachim Otto Fleckenstein.

II-24 (326 páginas, 1991). Ed. Charles Blanc.

*Commentationes astronomicae ad theoriam perturbationum pertinentes*

II-25 (331 páginas, 1960). Ed. Max Schürer.

II-26 (En preparación)

II-27 (En preparación)

*Commentationes astronomicae ad theoriam motuum planetarum et cometarum pertinentes*

II-28 (332 páginas, 1959). Ed. Leo Courvoisier.

*Commentationes astronomicae ad praecessionem et nutationem pertinentes*

II-29 (420 páginas, 1961). Ed. Leo Courvoisier.

*Sphärische Astronomie und parallaxe*

II-30 (351 páginas, 1964). Ed. Leo Courvoisier.

*Komische Physik*

II-31 (En preparación)

**Series tertia: Opera physica, Miscellanea.**

Esta es la serie III, contiene los trabajos dedicados a la física y temas relacionados.

Esta serie consta de 12 volúmenes.

*Commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes*

III-1 (591 páginas, 1926). Eds. Eduard Bernoulli, Rudolf Bernoulli

Ferdinand Rudio y Andreas Speiser.

*Rechenkunst. Accesserunt commentationes ad physicam generalem pertinentes et miscellanea*

III-2 (431 páginas, 1942). Eds. Edmund Hoppe, Karl Matter y

Johann Jakob Burckhardt (*Dioptrica*).

III-3 (510 páginas, 1911). Ed. Emil Cherbulez.

III-4 (543 páginas, 1912). Ed. Emil Cherbulez.

*Commentationes opticae.*

III-5 (395 páginas, 1963). Ed. Andreas Speiser.

III-6 (396 páginas, 1963). Ed. Andreas Speiser

III-7 (247 páginas, 1964). Ed. Andreas Speiser

III-8 (266 páginas, 1969). Ed. Max Herzberger.

III-9 (328 páginas, 1973). Eds. Walter Habicht y Emil Alfred Fellman.

*Magnetismus, Elektrizität, und Wärme*

III-10 (En preparación)

*Lettres à une princesse d'Allemagne.* Primera parte

III-11 (312 páginas, 1960). Ed. Andreas Speiser.

*Lettres à une princesse d'Allemagne Accesserunt: Rettung der göttlichen Offenbarung**Eloge d'Euler par le marquis de Condorcet.* Segunda parte

III-12 (312 páginas, 1960). Ed. Andreas Speiser.

**Series quarta. A:** *Commercium epistolicum*. Esta es la serie IV. Esta serie consiste de 9 volúmenes de correspondencia de Euler. *Descriptio commercii epistolici*.<sup>14</sup>

*Beschreibung, Zusammenfassung der Briefe und Verzeichnisse.*

IV-A-1 (684 páginas, 1975). Eds. Adolf P. Juskevic y Vladimir I. Smirnov y Walter Habicht.

*Commercium cum Johanne (I) Bernoulli et Nicolao (I) Bernoulli.*

IV-A-2 (747 páginas, 1998). Eds. E.A. Fellman y G.K. Mikhailov

IV-A-3 y IV-A-4 (En preparación).

*Correspondance de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J.d'Alembert et J.L. Lagrange.*

IV-A-5 (611 páginas, 1980). Eds. Adolf P. Juskevic y Rene Taton.

*Correspondance de Leonhard Euler avec P.-L.M. de Maupertius et Frédéric II.*

IV-A-6 (456 páginas, 1986). Eds. P. Costabel, F. Winter,

A.T. Grigorjian y A. P. Juskevic.

IV-A-7, IV-A-8 y IV-A-9 (En preparación).

**Series quarta. B:** *Manuscripta*. Esta serie se encuentra actualmente en preparación, consistirá de aproximadamente siete volúmenes que incluirán manuscritos a la fecha no publicados, notas, diarios, etc.

<sup>14</sup>Dos volúmenes de correspondencia científica de Euler con Goldbach, los Bernoullis y otros, han sido editado por P.H. Fuss *Corresponden Mathématique et Physique*, Vols. I II. The Sources of Sciences Jonson Reprint Corporation, 1968

# Bibliografía

- [1] BOYER C.B., *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc., 1968.
- [2] DHS, *Dictionnaire Historique de la Suisse*, Editions Gilles Attinger, Hauterive, ISBN 2-88256-133-4, 2002.
- [3] DUNHAM W., *Euler, Journey Through Genius*, John Wiley and Sons, Inc., 1990.
- [4] DUNHAM W., *Euler, The master of all us*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, 1999.
- [5] DUNHAM W. ED., *The genius of Euler. Reflexions on his life and work*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, 2007.
- [6] VARADARAJAN V.S., *Euler through time: a new look at old themes*, American Mathematical Society, 2006.
- [7] FELLMAN E.A., *Leonhard Euler*, Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin, 2007.
- [8] KLINE M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford university press, 1972.
- [9] ANDERSON K. ET AL., Euler' glossary, *Mathematics Magazine*, **56**, 315–325, November 1983.



## Capítulo 2

# El problema de los dos centros fijos

Joaquín Delgado <sup>1</sup> y Martha Álvarez Ramírez <sup>2</sup>

### Resumen

El problema de los dos centros fijos fue introducido por Euler como un modelo simplificado del problema de los tres cuerpos. En este trabajo se analizan los trabajos de Euler sobre los dos centros fijos catalogados como E301, E328 y E337 del índice Eneström (ver referencias al final de este trabajo). A continuación un resumen de estos trabajos: Primero Euler encuentra las integrales de energía y la ahora llamada integral de Euler y reduce el problema a una ecuación integral, que involucra integrales ahora llamadas elípticas. Euler da la solución completa dando explícitamente la solución general de esta ecuación integral, por lo que puede afirmarse que fue el primero en resolver el problema de los dos centros fijos. En los trabajos citados, estudia los casos restringidos cuando una de las masas es cero y el caso de masas iguales. Bajo ciertas condiciones sobre los valores de las integrales de energía y de la integral de Euler prueba que las soluciones pueden ser hiperbólicas o elípticas. En E337, Euler encuentra condiciones suficientes para que la curva solución en el plano de configuración sea algebraica. Años más tarde Adrien-Marie Legendre

---

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, [jdf@xanum.uam.mx](mailto:jdf@xanum.uam.mx)

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, [mar@xanum.uam.mx](mailto:mar@xanum.uam.mx)

generalizar a este resultado al encontrar familias más generales de curvas algebraicas y no algebraicas, en su obra monumental *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, tomo III. Con el fin de colocar en contexto los métodos usados por Euler para resolver la ecuación integral del problema de los centros fijos, se revisan dos de las contribuciones más importantes de Euler en la teoría de las integrales elípticas: el cálculo de la longitud de arco de 1/4 de la elipse (E028) y el teorema de adición de las integrales elípticas, comenzando con el caso particular de la longitud de arco de la lemniscata (E251) y en toda su generalidad para integrales elípticas (E345). El problema espacial de los dos centros fijos fue resuelto por Jacobi y generalizado para  $n$  centros fijos, incluyendo una fuerza elástica dirigida al centro, usando el método hoy conocido de la ecuación de Hamilton–Jacobi. Se presenta de manera resumida la solución del problema plano de dos centros fijos, mediante la separación de la ecuación de HJ en coordenadas elípticas confocales.

## 2.1. Euler y el problema de los dos centros fijos

En [5] Euler menciona que en vista de la dificultad de resolver el problema de los tres cuerpos, es conveniente intentar resolver problemas más sencillos. Euler atacó dos de ellos con éxito asombroso: En el problema colineal de 3 cuerpos, consigue encontrar las soluciones más sencillas en las que los cuerpos se mueven de forma homotética conservando la razón entre sus distancias. Tal configuración se llama una *configuración central*. Euler muestra que aún este caso sencillo está lejos de poder ser resuelto completamente. Posteriormente muestra que este tipo de soluciones se pueden generalizar al problema de los tres cuerpos en el que cada uno sigue una órbita circular Kepleriana partiendo de una configuración central con condiciones iniciales de velocidad convenientes. Los detalles en relación al problema colineal de tres cuerpos puede verse en [2]. El otro problema más sencillo que Euler estudió fue el de un cuerpo siendo atraído por dos masas fijas, problema que se conoce como el Problema de los 2 centros fijos. Citando a Euler<sup>3</sup>:

*He aquí un problema que parece tan importante como difícil. Conviene al día de hoy, que la Astronomía sea llevada al más alto grado de perfección, si se encontrara un medio de determinar el movimiento de tres cuerpos, que se atraen mutuamente en razón inversa del cuadrado de sus distancias. Sin embargo todos los aportes que los Geómetras han hecho hasta ahora para este efecto han sido inútiles, han encontrado al nivel del Análisis obstáculos invencibles, a pesar del gran progreso que se ha hecho en este estudio. Por lo tanto todos los pasos que se puedan dar para llegar a esta gran meta serán muy importantes. Desde este*

<sup>3</sup>Traducción libre de la introducción del original en francés [5]

*punto de vista, me he aplicado a la cuestión de dos cuerpos fijos, en el que se busca el movimiento de un tercero que es atraído siguiendo la ley mencionada.*

El objetivo de este trabajo es revisar la contribución de Euler a la resolución del Problema de los 2 centros fijos y comentar sobre investigaciones recientes y generalizaciones del problema. El análisis se basa principalmente en los trabajos [3],[4] , [5] y colateralmente [6]. En la medida de lo posible vamos a seguir la notación de los artículos originales de Euler, haciendo los comentarios respectivos. La razón es más profunda de lo que parece, pues revela mucho de la manera de pensar de Euler. Cabe mencionar que en 1786–1787, fecha de las obras citadas, Euler iniciaba la teoría de las integrales elípticas. Es por ello que para entender en detalle el enfoque de Euler a este problema es necesario revisar simultáneamente su contribución a esta teoría [6], [7], [8]

## 2.2. Ecuaciones de movimiento

Euler considera dos cuerpos fijos de masas  $A$  y  $B$  separados una distancia  $a$ , y un cuerpo de masa  $M$  siendo atraída por los cuerpos fijos con una ley de atracción inversa al cuadrado de la distancia. La notación se muestra en la Figura 2.1. Las distancias a los punto fijos son

$$vv = xx + yy, \quad (1)$$

$$uu = (a - x)(a - x) + yy. \quad (2)$$

En el siglo XVIII se acostumbraba usar la notación  $vv \equiv v^2$ ,  $uu \equiv u^2$ , etc. la notación de exponentes  $v^n$ ,  $u^n$ , etc. se acostumbraba para potencias mayores de 2 o potencias de expresiones complejas entre paréntesis y esta es la notación que sigue Euler en todos sus trabajos; sin embargo en lo sucesivo usaremos la notación compacta de exponentes, pues rápidamente las expresiones se complican dificultando aún más la lectura en los originales de manera innecesaria.

Las ecuaciones de movimiento son

$$ddx = -2g dt^2 \left( \frac{Ax}{v^3} - \frac{B(a-x)}{u^3} \right), \quad (3)$$

$$ddy = -2g dt^2 \left( \frac{Ay}{v^3} + \frac{By}{u^3} \right) \quad (4)$$

La notación es suficientemente clara para indicar las segundas derivadas respecto del tiempo del lado izquierdo y las componentes horizontal y vertical de la fuerza sobre el cuerpo de masa  $M$  del lado derecho. La constante gravitacional se denota por  $2g$ .

Más adelante se hará uso de las siguientes relaciones que se obtienen de la ley de los senos en el triángulo de la Figura 2.1:

$$v = \frac{a \sin \eta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad \& \quad u = \frac{a \sin \zeta}{\sin(\zeta + \eta)}, \quad (5)$$

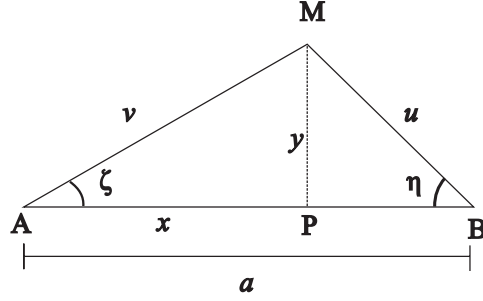


Figura 2.1: Notación en el problema de los dos centros fijos

y para las componentes de las fuerzas

$$\begin{aligned} -\frac{Ax}{v^3} &= -\frac{A \cos \zeta}{v^2}, & -\frac{Ay}{v^3} &= -\frac{A \sin \zeta}{v^2}, \\ \frac{B(a-x)}{u^3} &= \frac{B \cos \eta}{u^2}, & -\frac{By}{u^3} &= \frac{B \sin \eta}{u^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.3. La integral de energía

Euler encuentra dos integrales primeras de las ecuaciones de movimiento: la integral de energía y otra integral que es una combinación de las velocidades de área de los radios vectores respecto de los centros fijos, llamada ahora la integral de Euler. Para Euler una integral primera significa una relación funcional entre las diferenciales de primer orden  $dx$ ,  $dy$  y  $dt$ , digamos  $f(dx, dy, dt) = 0$ . Debido a que las ecuaciones de movimiento (3,4) son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, en dos variables es suficiente encontrar una integral funcionalmente independiente de la energía  $g(dx, dy, dt) = 0$ , lo cual significa que la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial dx} & \frac{\partial f}{\partial dy} & \frac{\partial f}{\partial dt} \\ \frac{\partial g}{\partial dx} & \frac{\partial g}{\partial dy} & \frac{\partial g}{\partial dt} \end{pmatrix}$$

tenga rango dos. El razonamiento es el siguiente: de las dos integrales primeras

$$\begin{aligned} f(dx, dy, dt) &= 0 \\ g(dx, dy, dt) &= 0 \end{aligned}$$

se puede eliminar por ejemplo  $dt$  para obtener una relación implícita  $h(dx, dy) = 0$ , que es una ecuación diferencial para la trayectoria en el espacio de configuración  $x$ - $y$ .



En el problema de los centros fijos, esta se reduce a una *ecuación integral* de la forma  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ . Lo que es más sorprendente es que Euler consigue separar las variables después de varios cambios de coordenadas.

La integral de energía la obtiene Euler de la manera como se acostumbra ahora: Multiplicando la ecuación (3) por  $dx$ , la ecuación (4) por  $dy$  y sumando se obtiene

$$\begin{aligned} 2dx \, ddx + 2dy \, ddy &= 4gdt^2 \left( -\frac{A(xdx + ydy)}{v^3} - \frac{B(-(a-x)dx + ydy)}{u^3} \right) \\ &= 4gdt^2 \left( -\frac{Adv}{v^2} - \frac{Bdu}{u^2} \right). \end{aligned}$$

donde a partir de (1) y (2) se usan las relaciones  $v dv = xdx + ydy$ ,  $u du = -(a-x)dx + ydy$ . Integrando esta diferencial exacta se obtiene

$$dx^2 + dy^2 = 4gdt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right) \quad (7)$$

donde la constante de integración  $4gC/a$  se identifica con la energía. Es interesante remarcar el uso ambivalente del símbolo  $dt^2$  en las ecuaciones de movimiento (3, 4) donde denotan segundas derivadas respecto de  $t$  y en (7) como el cuadrado de la diferencial de  $dt$ ,  $(dt)^2$ .

La integral de energía se puede escribir también en términos de los ángulos  $\zeta$ ,  $\eta$  mostrados en la Figura 2.1, usando las relaciones entre el elemento de arco en cartesianas y en polares

$$dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 d\zeta^2 = du^2 + u^2 d\eta^2. \quad (8)$$

Por ejemplo

$$dv^2 + v^2 d\zeta^2 = 4gdt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right). \quad (9)$$

## 2.4. La integral de Euler

Euler comienza por considerar las siguientes combinaciones a partir de las ecuaciones de movimiento que dan diferenciales exactas

$$\begin{aligned} xddy - yddx &= d(xdy - ydx) \\ &= 2gdt^2 \left( -\frac{Bay}{u^3} \right) = -2gBa \, dt^2 \frac{\sin \eta}{u^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (a-x)ddy + yddx &= d((a-x)dy + ydx) \\ &= 2gdt^2 \left( -\frac{Aay}{v^3} \right) = -2gAa \, dt^2 \frac{\sin \zeta}{v^2} \end{aligned} \quad (11)$$

donde se usaron las relaciones (6). Las cantidades (10) y (11) son las velocidades de las áreas barridas por los radios vectores de la partícula  $M$  respecto de cada uno de los centros atractores. Se pueden escribir en términos de  $d\zeta$ ,  $d\eta$  ya que (ver Figura 2.1)

$$x = v \cos \zeta, \quad (a - x) = u \cos \eta \quad (12)$$

$$y = v \sin \zeta = u \sin \eta, \quad (13)$$

por lo tanto, usando (10) y (11)

$$\begin{aligned} d(v^2 d\zeta) &= d(xddy - yddx) = -2gBa dt^2 \frac{\sin \eta}{u^2}, \\ &\& \\ d(u^2 d\eta) &= d((a - x)dy + ydx) = -2gAa dt^2 \frac{\sin \zeta}{v^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por  $u^2 d\eta$ , la segunda por  $v^2 d\zeta$  y sumando se obtiene la siguiente diferencial exacta

$$u^2 d\eta d(v^2 d\zeta) + v^2 d\zeta d(u^2 d\eta) = 2ga dt^2 (-A d\zeta \sin \zeta - B d\eta \sin \eta)$$

que después de integrar da

$$v^2 u^2 d\zeta d\eta = 2ga dt^2 (A \cos \zeta + B \cos \eta + D) \quad (14)$$

donde  $D$  es una constante de integración.

La integral de Euler se puede escribir también como

$$(x dy - y dx)((a - x)dy + y dx) = 2ga dt^2 \left( \frac{Ax}{v} + \frac{B(a - x)}{u} + D \right); \quad (15)$$

en efecto,  $v^2 d\zeta u^2 d\eta$  son las velocidades angulares de los radios vectores  $AM$ ,  $BM$  de la Figura 2.1 respectivamente, luego  $v^2 d\zeta u^2 d\eta = (x dy - y dx)((a - x) dy + y dx)$  y el lado derecho de (15) se obtiene usando (12) y (13).

La expresión (15) será retomada más adelante para obtener la solución completa en la sección § 2.5.3.

Ahora se puede eliminar  $dt$  de (9) y (14) para obtener

$$a(dv^2 + v^2 d\zeta^2)(A \cos \zeta + B \cos \eta + D) = 2v^2 u^2 d\zeta d\eta \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right), \quad (16)$$

o de manera equivalente

$$\begin{aligned} a(dx^2 + dy^2) \left( \frac{Ax}{v} + \frac{B(a - x)}{u} + D \right) = \\ 2(xdy - ydx)((a - x)dy + ydx) \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

La cuadratura (16) se puede expresar en términos de sólo dos variables independientes y sus diferenciales, por ejemplo  $u-v$  o  $\zeta-\eta$ . Euler muestra que la primera opción es muy engorrosa así que escoge eliminar a  $du$  y  $dv$  y expresar la cuadratura en términos de  $\zeta, \eta$  y sus diferenciales. Veamos el desarrollo.

Euler usa (16) con  $dv^2 + v^2 d\zeta^2 = dx^2 + dy^2$ , de acuerdo a (8) y usando nuevamente las relaciones (5) para obtener

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2(d\zeta^2 \sin^2 \eta + d\eta^2 \sin^2 \zeta - 2d\zeta d\eta \sin \eta \cos(\zeta + \eta))}{\sin^4(\zeta + \eta)},$$

que se deberá multiplicar por  $(A \cos \zeta + B \cos \eta + D)$  para obtener el miembro izquierdo de (16); falta eliminar  $u$  y  $v$  del lado derecho de (16), pero nuevamente de (5)

$$v^2 u^2 = \frac{a^4 \sin^2 \zeta \sin^2 \eta}{\sin^4(\zeta + \eta)},$$

que deberá multiplicarse por

$$\left( \frac{A \sin(\zeta + \eta)}{\sin \eta} + \frac{B \sin(\zeta + \eta)}{\sin \zeta} + C \right) \frac{1}{a}.$$

para obtener el miembro derecho de (16). Después de una simplificación ardua aunque directa, se llega a

$$\begin{aligned} & d\zeta^2 \sin^2 \eta + d\eta^2 \sin^2 \zeta \\ &= 2d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta \frac{A \cos \eta + B \cos \zeta + D \cos \zeta \cos \eta + E \sin \zeta \sin \eta}{A \cos \zeta + B \cos \eta + D} \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $E = C - D$ . Se abrevia

$$\begin{aligned} P &= A \cos \eta + B \cos \zeta + D \cos \zeta \cos \eta + E \sin \zeta \sin \eta, \\ Q &= A \cos \zeta + B \cos \eta + D. \end{aligned}$$

De (18) se despeja

$$\frac{d\zeta \sin \eta}{d\eta \sin \zeta} = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - Q^2}}{Q} \quad (19)$$

## 2.5. De motv corporis (1766)

El problema que enfrenta Euler es encontrar explícitamente la solución de la ecuación de Pfaff<sup>4</sup> (18). En el trabajo al que se hace referencia en esta sección, Euler

<sup>4</sup>Johan Friederich Pfaff, admirador de Euler y maestro de Gauss; sin duda su contribución más importante, de 1815, se refiere a la reducción de una ecuación diferencial parcial a un sistema de ecuaciones ordinarias conocido como el método de características. Su trabajo fué apreciado y retomado por la escuela de Cartan.

resuelve casos particulares; en especial le interesa investigar si existen soluciones en forma de secciones cónicas; ello motivado por las soluciones Keplerianas conocidas en el problema de 2 cuerpos. Euler sostiene que el problema de los centros fijos podría tomarse como punto de partida para comenzar a entender el problema de los tres cuerpos. Existen trabajos recientes en los que se encuentran soluciones periódicas al problema restringido de tres cuerpos como perturbaciones del problema de los centros fijos; en las primeras misiones espaciales se le dió mucha importancia, pero este tipo de órbitas resultaron de poca utilidad práctica.

En § 16 op. cit., Euler menciona que en vista de la dificultad de resolver las ecuaciones completas analizará los casos en los que la masa de uno de los *primarios*  $A$  o  $B$  es nula. El siguiente pasaje en latín puede entenderse sin dificultad

*Cum nulla via pateat huiusmodi aequationes resoluendi, contemplemur casus, qui ubi resolutio est in potestate, qui fund, quando vel  $A = 0$ , vel  $B = 0$ .*

Haciendo  $B = 0$  en (10) se obtiene  $x dy - y dx = \text{const.} dt$ , que se escribe de manera conveniente abajo. Haciendo lo mismo en la relación de energía (7) se obtiene (en el original falta el exponente 2 en  $dt^2$ )

$$dx^2 + dy^2 = 4g dt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{C}{a} \right) \quad (20)$$

$$(x dy - y dx)^2 = 4g F a dt^2 \quad (21)$$

De estas relaciones se puede eliminar  $dt$ . El resultado se expresa en términos de los ángulos como se mostró anteriormente hasta obtener

$$\cot \eta + \cot \zeta = \frac{A + M \cos \zeta + N \sin \zeta}{2F \sin \zeta} \quad (22)$$

El caso  $A = 0$  es análogo:

$$\cot \zeta + \cot \eta = \frac{A + M' \cos \eta + N' \sin \eta}{2F \sin \eta} \quad (23)$$

Es interesante ver cómo muestra que la integración da secciones cónicas en el caso restringido  $B = 0$ : Eliminando  $dt$  de (20) y (21) se tiene

$$F a (dx^2 + dy^2) = (x dy - y dx)^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{C}{a} \right)$$

o bien

$$F a (dv^2 + v^2 d\zeta^2) = v^4 d\zeta^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{C}{a} \right)$$

de donde

$$F a dv^2 = v^4 d\zeta^2 \left( \frac{C}{a} + \frac{A}{v} - \frac{F a}{v^2} \right)$$

Tomando raíz cuadrada

$$\frac{dv}{v^2} \sqrt{Fa} = \zeta \sqrt{\frac{C}{a} + \frac{A}{v} - \frac{Fa}{v^2}}$$

que se puede reducir haciendo el cambio de variable auxiliar  $\frac{1}{v} = \frac{z}{a}$  y en consecuencia

$$-dz = d\zeta \sqrt{\frac{C + Az}{F} - z^2}$$

o bien

$$\zeta + \alpha = \arccos \frac{2Fz - a}{\sqrt{A^2 + 4CF}}.$$

Volviendo a la variable  $v$  obtiene finalmente

$$v = \frac{2Fa}{A + \sqrt{A^2 + 4CF} \cos \zeta}$$

que es la ecuación polar de una cónica.

### 2.5.1. Movimiento hiperbólico

Euler considera el caso de masas iguales  $A = B$  y energía e integral de Euler nulas  $D = E = 0$ . Prueba que el movimiento es hiperbólico como se muestra en la Figura 2.3:  $C$  es el punto medio del segmento  $AB$ ,  $|AB| = a = 2b$  y  $z$  es la distancia del pie de la perpendicular  $MP$  a  $C$ . La ecuación de la hipérbola es

$$y^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2} (z^2 - c^2). \quad (24)$$

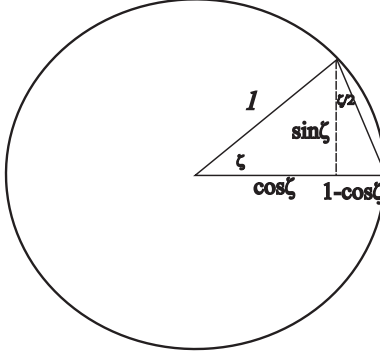
La deducción es como sigue: Partiendo de la relación fundamental (18) con  $D = E = 0$  y masas iguales  $A = B$ ,

$$d\zeta^2 \sin^2 \eta + d\eta^2 \sin^2 \zeta = 2d\zeta d\eta \sin \zeta \sin \eta$$

que se factoriza como  $(d\zeta \sin \eta - d\eta \sin \zeta)^2 = 0$ , de donde  $d\zeta \sin \eta = d\eta \sin \zeta$ . Separando variables e integrando,  $\ln \tan \frac{1}{2}\zeta = \ln \tan \frac{1}{2}\eta + cte.$ , o bien

$$m \tan \frac{1}{2}\zeta = n \tan \frac{1}{2}\eta$$

con  $m, n$  constantes; por lo tanto las tangentes de los semiángulos  $BAM$  y  $ABM$  están en proporción constante:

Figura 2.2: Relación entre  $\tan \zeta$  y  $\tan \frac{1}{2}\zeta$ 

*Ita vt tangentes semisum algulorum BAM et ABM perpetuo eindem rationem seruent.*<sup>5</sup>

Usando la relación

$$\tan \frac{1}{2}\zeta = (1 - \cos \zeta) / \sin \zeta \quad (25)$$

(véase la Figura 2.2) y la misma para el ángulo  $\eta$  se obtiene

$$m(1 - \cos \zeta) \sin \eta = n(1 - \cos \eta) \sin \zeta,$$

y ya que (12)  $\cos \zeta = \frac{x}{v}$ ,  $\sin \zeta = \frac{y}{v}$  y  $\cos \eta = \frac{a-x}{u}$ ,  $\sin \eta = \frac{y}{u}$ , entonces  $\frac{m(v-x)y}{vu} = \frac{n(u-a+x)}{vu}$  o bien

$$m(v-x) = n(u-a+x). \quad (26)$$

Nuevamente el álgebra de Euler es exquisita:

Del teorema de Pitágoras aplicado a los rectángulos  $APM$  y  $BPM$  de la Figura 2.1, se obtienen las expresiones

$$x = \frac{a^2 + v^2 - u^2}{2a}, \quad a - x = \frac{a^2 + u^2 - v^2}{2a}.$$

Al sustituirlas en (26) dan

$$\begin{aligned} m(u^2 - (a-v)^2) &= n(v^2 - (a-u)^2), \\ m(u+v-a)(u+a-v) &= n(v+u-a)(v+a-u), \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Se deja como ejercicio al lector probar que esta propiedad es una definición equivalente de la hipérbola. Más adelante se usará la propiedad de que el producto de las tangentes de los semiángulos  $BAM$  y  $ABM$  es constante para la elipse. Los autores no encontraron referencia alguna de esta propiedad general de las cónicas que parece poco conocida, sino es que francamente olvidada.

que al dividir entre  $u + v - a$  nos da una primera ecuación que deben satisfacer  $u$  y  $v$ . La otra ecuación se obtiene de (26). Resumiendo, debe satisfacerse el sistema de ecuaciones para  $u$  y  $v$ :

$$\begin{aligned} u - v &= \frac{(n - m)a}{m + n} \\ nu - mv &= na - (n + m)x \end{aligned}$$

(observe que la primera igualdad es la definición de la hipérbola). Al resolver da

$$\begin{aligned} (n - m)u &= \frac{(m^2 + n^2)a}{m + n} - (m + n)x \\ (n - m)v &= \frac{2mna}{m + n} - (m + n)x. \end{aligned}$$

Al tomar el cuadrado de la última ecuación

$$(n - m)^2 y^2 + (n - m)^2 x^2 = \frac{4m^2 n^2 a^2}{(m + n)^2} - 4mnax + (m + n)^2 x.$$

Despejando  $y^2$ ,

$$\begin{aligned} (n - m)^2 y^2 &= \frac{4m^2 n^2 a^2}{(m + n)^2} - 4mnax + 4mnx^2 \\ &= \frac{4m^2 n^2 a^2}{(m + n)^2} + 4mn(x^2 - ax) \pm 4mn\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4m^2 n^2 a^2}{(m + n)^2} + 4mn(x - a/2)^2 - mna^2 \\ &= \frac{4m^2 n^2 a^2 - (m + n)^2 mna^2}{(m + n)^2} + 4mn(x - a/2)^2 \\ &= -\frac{mna^2(n - m)^2}{(m + n)^2} + 4mn(x - a/2)^2 \\ &= 4mn(x - b)^2 - \frac{4mnb^2(n - m)^2}{(m + n)^2} \end{aligned}$$

donde  $b = a/2$ . Simplificando

$$y^2 = \frac{4mn(x - b)^2}{(n - m)^2} - \frac{4mnb^2}{(m + n)^2}.$$

El factor  $4mn4mn = (m + n)^2 - (n - m)^2 = b^2 - c^2$  y haciendo  $b = m + n$ ,  $c = n - m$ ,  $z = x - b$ , entonces se puede escribir

$$y^2 = (b^2 - c^2) \left( \frac{(x - b)^2}{c^2} - 1 \right).$$

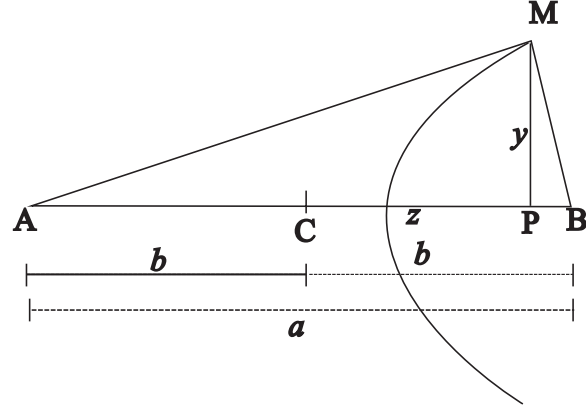


Figura 2.3: Movimiento hiperbólico para masas iguales

o bien

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola con centro en el punto medio  $C$ , semieje  $c$  y distancia del foco al centro  $= b$ .

Euler analiza si en el caso de masas iguales se puede dar el movimiento elíptico. Partiendo de (24) obtiene

$$\begin{aligned} y \, dy &= \frac{b^2 - c^2}{c^2} z \, dz \\ dy &= \frac{z \, dz}{\sqrt{z^2 - c^2}} \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 + dy^2 = \frac{dz^2(b^2 z^2 - c^4)}{c^2(z^2 - c^2)}. \quad (27)$$

De la Figura 2.3,

$$v^2 = (b + z)^2 + y^2, \quad u^2 = (b - z)^2 + c^2 \quad (28)$$

y usando (24) para calcular  $y^2$  y por tanto  $1/v$  y  $1/u$  se obtiene, de la relación de energía (7) con  $C = D + E = 0$ ,  $A = B$ ,

$$dx^2 + dy^2 = 4Ag \, dt^2 \left( \frac{c}{bz - c^2} + \frac{c}{bz + c^2} \right) = \frac{8Abcgz \, dt^2}{b^2 z^2 - c^4} \quad (29)$$



de donde la rapidez (*celeritas*) en el vértice de la hipérbola  $z = c$  es igual a  $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dt} = \frac{2\sqrt{2}Abg}{\sqrt{b^2-c^2}}$ . Por lo tanto la hipérbola se convierte en elipse si  $c > b$ , pero esto implicaría que la velocidad fuera imaginaria.

La ley de movimiento se obtiene comparando (27) con (29); de ahí

$$\begin{aligned} 8Abcg dt^2 &= \frac{dz^2(b^2z^2 - c^4)^2}{c^2z(z^2 - c^2)} \\ 2ct\sqrt{2Abcg} &= \int dz \frac{b^2z^2 - c^4}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}} \\ &= b^2 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}} - c^4 \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}}. \end{aligned}$$

La primera integral se puede hacer notando que  $d\sqrt{z(z^2 - c^2)} = \frac{3z^2 - c^2}{2\sqrt{z(z^2 - c^2)}}$ , luego

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}} = \frac{2}{3}\sqrt{z(z^2 - c^2)} + \frac{1}{3}c^2 \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}}$$

por lo que el tiempo queda expresado explícitamente como

$$2ct\sqrt{2Abcg} = \frac{2}{3}b^2\sqrt{z(z^2 - c^2)} + \frac{1}{3}c^2(b^2 - 3c^2) \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}} \quad (30)$$

por lo que falta tan sólo integrar  $\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}}$  que no se puede exhibir como la cuadratura de un círculo o hipérbola.<sup>6</sup>

Esta última integral la resuelve Euler en un caso especial, introduciendo nuevamente el ángulo  $BAM = \zeta$ . Recordando que  $x = v \cos \zeta$ ,  $y = v \sin \zeta$  y de (25), se sigue que  $\tan \frac{1}{2}\zeta = \frac{1-\cos \zeta}{\sin \zeta} = \frac{v-x}{y} = \frac{v-b+z}{y}$ . También

$$\begin{aligned} v^2 &= (b-z)^2 + y^2 \\ &= b^2 - 2bz + z^2 + \frac{b^2 - c^2}{c^2}(z^2 - c^2) \\ &= \frac{b^2}{c^2}z^2 - 2bz + c^2 = \frac{b^2z^2 - 2bc^2z + c^4}{c^2} \\ &= \frac{(bz - c^2)^2}{c^2} \\ v &= \frac{bz - c^2}{c}. \end{aligned} \quad (31)$$

<sup>6</sup>Euler se refiere a que el resultado no se puede expresar en término de funciones trigonométricas o hiperbólicas.

sustituyendo  $v$  de (31),  $y^2$  de (24), se tiene

$$\begin{aligned}
 \tan \frac{1}{2}\zeta &= \frac{v - b + z}{y} = \frac{\frac{bz - c^2}{c} - b + z}{y} \\
 &= \frac{bz - c^2 - bc + cz}{\sqrt{(b^2 - c^2)(z^2 - c^2)}} \\
 &= \frac{(b + c)z - c(b + c)}{\sqrt{(b^2 - c^2)(z^2 - c^2)}} \\
 &= \frac{(b + c)(z - c)}{\sqrt{(b^2 - c^2)(z^2 - c^2)}} \\
 &= \sqrt{\frac{b + c}{b - c} \cdot \frac{z - c}{z + c}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tan \frac{1}{2}\zeta = \sqrt{\frac{b + c}{b - c} \cdot \frac{z - c}{z + c}}$$

de donde se obtiene<sup>7</sup>

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2}\zeta}{\cos^2 \frac{1}{2}\zeta} = \frac{b + c}{b - c} \frac{z - c}{z + c}$$

$$\begin{aligned}
 (b - c)(z + c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta + c(b - c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta &= \\
 &= (b + c)z \cos^2 \frac{1}{2}\zeta - c(b + c) \cos^2 \frac{1}{2}\zeta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [(b - c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta - (b + c) \cos^2 \frac{1}{2}\zeta] z &= \\
 &= -c [(b + c) \cos^2 \frac{1}{2}\zeta + (b - c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [(b - c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta - (b + c) + (b + c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta] z &= \\
 &= -c [(b + c) - (b + c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta + (b - c) \sin^2 \frac{1}{2}\zeta]
 \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>En el escaneado del original, las líneas verticales se pierden con frecuencia, causando que muchos signos + aparezcan como -. Hemos rehecho las deducciones algebraicas intermedias con el fin de tener las expresiones correctas

$$\begin{aligned}
[2b \sin^2 \tfrac{1}{2}\zeta - b - c] z &= -c [b + c - 2c \sin^2 \tfrac{1}{2}\zeta] \\
- [c + b(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\zeta)] z &= -c [b + c(1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\zeta)] \\
- [c + b \cos \zeta] z &= -c [b + c \cos \zeta] \\
z &= \frac{c(b + c \cos \zeta)}{c + b \cos \zeta}
\end{aligned} \tag{32}$$

Se sigue entonces de (31) y de la última expresión que

$$\begin{aligned}
v &= \frac{bz - c^2}{c} \\
&= \frac{b \frac{c(b + c \cos \zeta)}{c + b \cos \zeta} - c^2}{c} \\
&= \frac{bc(b + c \cos \zeta) - c^2(c + b \cos \zeta)}{c(c + b \cos \zeta)} \\
&= \frac{b^2c - c^3}{c(c + b \cos \zeta)} \\
v &= \frac{b^2 - c^2}{c + b \cos \zeta}
\end{aligned} \tag{33}$$

y

$$\begin{aligned}
z^2 - c^2 &= \frac{c^2(b + c \cos \zeta)^2}{(c + b \cos \zeta)^2} - \frac{c^2(c + b \cos \zeta)^2}{(c + b \cos \zeta)^2} \\
&= \frac{c^2(b + c + (b + c) \cos \zeta)(b - c + (c - b) \cos \zeta)}{(c + b \cos \zeta)^2} \\
&= \frac{c^2(b + c)(1 + \cos \zeta)(b - c)(1 - \cos \zeta)}{(c + b \cos \zeta)^2} \\
&= \frac{c^2(b^2 - c^2)(1 - \cos^2 \zeta)}{(c + b \cos \zeta)^2} \\
&= \frac{c^2(b^2 - c^2) \sin^2 \zeta}{(c + b \cos \zeta)^2} \\
\sqrt{z^2 - c^2} &= \frac{c \sin \zeta \sqrt{b^2 - c^2}}{c + b \cos \zeta}
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{z(z^2 - c^2)} &= \frac{\sqrt{c(b + c \cos \zeta)}}{\sqrt{c + b \cos \zeta}} \cdot \frac{c \sin \zeta \sqrt{b^2 - c^2}}{c + b \cos \zeta} \\
&= \frac{c \sin \zeta \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{c(b + c \cos \zeta)}}{(c + b \cos \zeta)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{35}$$

Las expresiones (34), (33), (32), (31), (30) coinciden con las que aparecen en § 26 y § 28 del original [3], pero aparece un signo  $-$  incorrectamente en el cálculo de la diferencial  $dz$  calculada a partir de (32),

$$dz = -\frac{c(b^2 - c^2)d\zeta \sin \zeta}{(c + b \cos \zeta)^2} \quad (\text{errado})$$

Lo que es peor, la expresión para

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}} = -d\zeta \sqrt{b^2 - c^2} \quad (\text{errado}) \quad (36)$$

parece totalmente errónea. Este paso invalida todos los pasos consecuentes; así que seguiremos la deducción por nuestra cuenta, comentando la expresión correspondiente que aparece en el original.

La diferencial  $dz$  a partir de (32) es

$$dz = \frac{c(b^2 - c^2) \sin \zeta}{(c + b \cos \zeta)^2} \quad (37)$$

que junto con (34) da

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{c(b^2 - c^2) \sin \zeta}{(c + b \cos \zeta)^2} \cdot \frac{c + b \cos \zeta}{c \sin \zeta \sqrt{b^2 - c^2}} = \frac{d\zeta \sqrt{b^2 - c^2}}{c + b \cos \zeta} \quad (38)$$

que es la expresión correcta, en vez de (36) (se podría pensar que la falta del denominador en (36) es un error tipográfico, pero los cálculos subsecuentes en el original hacen pensar que esto no es así). Procedamos entonces por nuestra cuenta; de (38) y (32) se sigue

$$\begin{aligned} \frac{dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}} &= \frac{d\zeta \sqrt{b^2 - c^2}}{c + b \cos \zeta} \cdot \frac{\sqrt{c + b \cos \zeta}}{\sqrt{c(b + c \cos \zeta)}} = \\ &= \frac{d\zeta \sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{(c + b \cos \zeta)c(b + c \cos \zeta)}} \quad (39) \end{aligned}$$

La ley de movimiento de acuerdo a (30), y usando (35) y (38)

$$\begin{aligned} 2ct\sqrt{2Abcg} &= \frac{2}{3}b^2\sqrt{z(z^2 - c^2)} + \\ &+ \frac{1}{3}c^2(b^2 - 3c^2) \int \frac{dz}{\sqrt{z(z^2 - c^2)}} \\ &= \frac{2}{3}b^2 \frac{c \sin \zeta \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{c(b + c \cos \zeta)}}{(c + b \cos \zeta)^{3/2}} + \\ &+ \frac{1}{3}c^2(b^2 - 3c^2) \int \frac{d\zeta \sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{(c + b \cos \zeta)c(b + c \cos \zeta)}} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{2t\sqrt{2Abg}}{\sqrt{b^2 - c^2}} &= \frac{2}{3}b^2 \frac{\sin \zeta \sqrt{b + c \cos \zeta}}{(c + b \cos \zeta)^{3/2}} \\ &+ \frac{1}{3}(b^2 - 3c^2) \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(c + b \cos \zeta)(b + c \cos \zeta)}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Euler en cambio obtiene la relación [§ 27, op. cit.]

$$\frac{2t\sqrt{2Abg}}{\sqrt{b^2 - c^2}} = \frac{2}{3}b^2 \frac{\sin \zeta \sqrt{b + c \cos \zeta}}{(c + b \cos \zeta)^{3/2}} - \frac{1}{3}(b^2 - 3c^2) \int \frac{d\zeta \sqrt{(c + b \cos \zeta)}}{\sqrt{(b + c \cos \zeta)}}. \quad (41)$$

La cantidad  $k \equiv \frac{2\sqrt{2Abg}}{\sqrt{b^2 - c^2}}$  es la rapidez de  $M$  en el vértice de la hipérbola (*celeritas*). En el caso que  $b^2 = 3c^2$ , el segundo término se anula y la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} kt &= \frac{2}{3}b^2 \frac{\sin \zeta}{c + b \cos \zeta} \cdot \sqrt{\frac{b + c \cos \zeta}{c + b \cos \zeta}} \\ &= \frac{2c \sin \zeta}{(1 + \sqrt{3} \cos \zeta)} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \cos \zeta}{1 + \sqrt{3} \cos \zeta}}. \end{aligned}$$

Simplificando,  $k = 2\sqrt{\frac{Ag\sqrt{3}}{c}} = 2\sqrt{\frac{3Ag}{b}}$ ; o bien de manera breve usando (30)

$$t \frac{\sqrt{2Abcg}}{c} = \sqrt{z(z^2 - c^2)}.$$

En este caso la posición de  $M$  para un tiempo dado  $t$  satisface la ecuación cúbica

$$z^2 - c^2 z = \frac{2Acgt^2}{c^2} = \frac{2Agt^2\sqrt{3}}{c}. \quad (42)$$

Esta última expresión concide con la original [§ 28, op. cit], debido a que el término incorrecto en (41) se anula en el caso  $b^2 = 3c^2$ .

### 2.5.2. Movimiento elíptico

En el caso de masas iguales  $A = B$  y valor de las integrales de Euler y de energía iguales a cero,  $D = E = 0$ , se probó que existe el movimiento hiperbólico. Euler investiga ahora la posibilidad de movimiento elíptico. El análisis sigue la metodología general:

1. Probar que existe el movimiento elíptico.

2. Determinar las condiciones que deben satisfacer los valores de las integrales primeras y las masas.
3. Encontrar la ley de movimiento, de ser posible.

Euler comienza por imponer la condición necesaria

$$\tan \frac{1}{2}\zeta \tan \frac{1}{2}\eta = m \quad (cte.) \quad (43)$$

de donde,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 - \cos \zeta}{\sin \zeta} \cdot \frac{1 - \cos \eta}{\sin \eta} \\ &= \frac{v - b + z}{y} \cdot \frac{u - b - z}{y} \end{aligned} \quad (44)$$

o bien  $my^2 = (v - b + z)(u - b - z)$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} y^2 &= v^2 - (b - z)^2 = (v - b + z)(v + b - z) \\ y^2 &= u^2 - (b + z)^2 = (u - b - z)(u + b + z) \end{aligned} \quad (45)$$

de donde, dividiendo cada ecuación con la precedente para eliminar  $y^2$ , se sigue

$$\begin{aligned} u - b - z &= m(v + b - z) \\ v - b + z &= m(u + b + z) \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene

$$u + v = \frac{2(1 + m)b}{1 - m} \equiv 2c$$

donde  $m = \frac{c-b}{c+b}$ , y  $2c$  es el *axem transversum* (eje mayor). De manera similar  $v^2 - u^2 = 4bz$  que al dividir entre  $u + v$  de la última expresión, da  $u - v = 2bz/c$ . Se tiene entonces el sistema lineal para  $u, v$ :

$$\begin{aligned} u + v &= 2c \\ u - v &= \frac{2bz}{c} \end{aligned}$$

(observe que la primera ecuación define una elipse), cuya solución es  $v = c - bz/c$ ,  $u = c + bz/c$ ; al sustituir este valor de  $v$  en la primera ecuación de (45) se obtiene

$$y^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2}(c^2 - z^2) \quad \text{o bien} \quad \frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1 \quad (46)$$

que es la ecuación de una elipse, supuesto  $c > b$ , es decir  $m > 0$

Tomando logaritmos en (43)

$$\ln \tan \frac{1}{2}\zeta + \ln \tan \frac{1}{2}\eta = \ln m$$

y derivando, se tiene  $\frac{d\zeta}{\sin \zeta} + \frac{d\eta}{\sin \eta} = 0$ , o bien  $\frac{d\zeta \sin \eta}{d\eta \sin \zeta} = -1$ , que comparando con (18) implica  $\frac{P \pm \sqrt{P^2 - Q^2}}{Q} = -1$ , de donde  $P + Q = 0$ , o sea

$$(A + B)(\cos \zeta + \cos \eta) + D + D \cos \zeta \cos \eta + E \sin \zeta \sin \eta = 0, \quad (47)$$

pero de la relación (43), y usando (44) se tiene

$$\frac{(1 - \cos \zeta)(1 - \cos \eta)}{\sin \zeta \sin \eta} = m = \frac{c - b}{c + b}$$

de donde el producto  $\sin \zeta \sin \eta$  puede despejarse y sustituirse en (47) para obtener

$$\begin{array}{ccccccc} m(A + B)(\cos \zeta + \cos \eta) & + & mD & + & mD \cos \zeta \cos \eta \\ -E(\cos \zeta + \cos \eta) & + & E & + & E \cos \zeta \cos \eta & = & 0. \end{array}$$

Como esta igualdad debe darse para todo  $\zeta, \eta$ , necesariamente

$$E = m(A + B) \quad \& \quad D = -\frac{E}{m}$$

es decir

$$E = \frac{c - b}{c + b}(A + B) \quad \& \quad C = D + E = \frac{-2b}{c + b}(A + B). \quad (48)$$

Estas son las relaciones que deben satisfacer los valores de las integrales y las masas.

La ley de movimiento, la obtiene Euler derivando la ecuación de la elipse (46)

$$dy = -\frac{zdz}{\sqrt{c^2 - z^2}} \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}$$

por tanto, ya que  $dx = dz$ ,

$$dx^2 + dy^2 = dz^2 + dy^2 = \frac{dz^2(c^4 - b^2z^2)}{c^2(c^2 - z^2)}. \quad (49)$$

La relación análoga a (29) para el caso elíptico, se obtiene a partir de la relación de energía (7) y de (28)

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= 4gdt^2 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{2b} \right) \\ &= 4gdt^2 \left( \frac{Ac}{c^2 - bz} + \frac{Bc}{c^2 + bz} - \frac{A + B}{c + b} \right) \end{aligned}$$

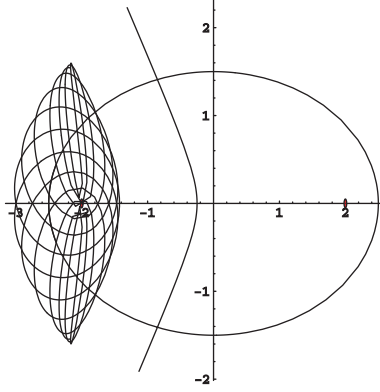


Figura 2.4: Soluciones hiperbólicas, elípticas y una trayectoria típica del problema de los dos centros fijos.

donde en la última expresión se usó la segunda igualdad en (48). Simplificando,

$$dx^2 + dy^2 = \frac{4bgdt^2 (A(c+z)(c^2+bz) + B(c-z)(c^2-bz))}{(c+b)(c^4-b^2z^2)}. \quad (50)$$

De (49) y (50) se obtiene

$$\frac{4bc^2gdt^2}{b+c} = \frac{dz^2(c^4-b^2z^2)^2}{(c^2-z^2)(A(c+z)(c^2+bz) + B(c-z)(c^2-bz))}$$

por tanto integrando,

$$2ct\sqrt{\frac{bg}{b+c}} = \int \frac{(c^4-b^2z^2)dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(A(c+z)(c^2+bz) + B(c-z)(c^2-bz))}},$$

(en el original aparece:

$$2ct\sqrt{\frac{bg}{b+c}} = \int \frac{(c^4-b^2z^2)dz}{\sqrt{(c^2-z^2)(A(c^2+bz) + B(c-z)(c^2-bz))}}).$$

ver la figura 2.4.

### 2.5.3. Solución completa

Euler aborda ahora el problema de reducir la solución completa del problema de los centros fijos a una ecuación integral cuya solución habrá de investigar más adelante. El trecho que en seguida vamos a analizar es común a [3, §36] y [5]; después en



[3], Euler busca la solución más general posible; y en [5] intenta responder bajo qué condiciones la curva descrita por el cuerpo  $M$  es algebraica.

Lo que sigue es álgebra exquisita al estilo Euleriano que vale la pena desmenuzar: Partiendo de (19), con  $\lambda = \frac{d\zeta \sin \eta}{d\eta \sin \zeta}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} &= \frac{P + Q + \sqrt{P^2 - Q^2}}{P - Q + \sqrt{P^2 - Q^2}} \\ &= \frac{\sqrt{P + Q}(\sqrt{P + Q} + \sqrt{P - Q})}{\sqrt{P - Q}(\sqrt{P - Q} + \sqrt{P + Q})} = \frac{\sqrt{P + Q}}{\sqrt{P - Q}} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d\zeta \sin \eta + d\eta \sin \zeta}{d\zeta \sin \eta - d\eta \sin \zeta} = \sqrt{\frac{P + Q}{P - Q}}. \quad (51)$$

Como las variables  $\zeta$  y  $\eta$  están extremadamente “revueltas”, Euler hace el siguiente cambio de variable  $\tan \frac{1}{2}\zeta = p$  &  $\tan \frac{1}{2}\eta = q$ , de donde se siguen  $\frac{d\zeta}{\sin \zeta} = \frac{dp}{p}$ ,  $\frac{d\eta}{\sin \eta} = \frac{dq}{q}$  y con ello el lado izquierdo de (51) es

$$\frac{d\zeta \sin \eta + d\eta \sin \zeta}{d\zeta \sin \eta - d\eta \sin \zeta} = \frac{qdp + pdq}{qdp - pdq} \quad (52)$$

Por otro lado el lado izquierdo de (51) se puede escribir en términos de  $p$  y  $q$  mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\zeta &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, & \cos \frac{1}{2}\zeta &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \\ \sin \frac{1}{2}\eta &= \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}, & \cos \frac{1}{2}\eta &= \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \end{aligned}$$

junto con las fórmulas para el ángulo doble

$$\sin \zeta = \frac{2p}{1+p^2}, \quad \cos \zeta = \frac{1-p^2}{1+p^2}, \quad \sin \eta = \frac{2q}{1+q^2}, \quad \cos \eta = \frac{1-q^2}{1+q^2}.$$

El resultado,

$$\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{(A + B)(1 - p^2q^2) + D(1 + p^2q^2) + 2Epq}{(A - B)(p^2 - q^2) + D(p^2 + q^2) + 2Epq}$$

tiene por numerador una función de  $pq$  y el denominador es una función homogénea de grado dos en  $p$  y  $q$ . Euler toma provecho de *cette belle propriété* haciendo el cambio de variables  $pq = r$ ,  $p/q = s$ . Después de expresar las diferenciales  $p$  y  $q$  en función de las de  $r$  y  $s$ , la ecuación resultante se separa, reduciendo finalmente el problema a la cuadratura

$$\frac{dr}{\sqrt{(A + B + D)r + 2Er^2 - (A + B - D)r^3}} = \frac{ds}{\sqrt{(B - A - D)s + 2Es^2 - (B - A + D)s^3}}. \quad (53)$$

La “ley de movimiento”, es decir la solución explícita en función del tiempo  $t$  se obtiene en términos de las cuadraturas anteriores. Euler no se detiene en explicar los detalles pero menciona que se obtiene directamente de la integral de energía o de Euler.

$$\begin{aligned} \frac{dt\sqrt{2g}}{a\sqrt{a}} = & \frac{dr\sqrt{r}}{(1-r^2)\sqrt{A+B+D+2Er-(A+B-D)r^2}} \\ + & \frac{ds\sqrt{s}}{(1+s^2)\sqrt{B-A-D+2Es-(B-A+D)s^2}} \end{aligned}$$

## 2.6. Integrales elípticas y lemniscatas

Con el fin de entender mejor el camino seguido por Euler en la resolución de la ecuación integral (53), es conveniente comentar sobre lo que se conocía sobre integrales elípticas y funciones algebraicas. La teoría de las funciones elípticas estaba siendo desarrollada en el siglo XVII por el mismo Euler, Jacobi, Legendre, y en su forma actual hacia finales del siglo XVIII y principios del XIX con Gauss y Abel [9], principalmente. Para una discusión más avanzada de estos temas recomendamos la excelente referencia [13].

Se puede decir que el estudio de las integrales elípticas inicia con Wallis, en 1665, quien calcula la longitud de arco de varias cicloides y las relaciona con la longitud de arco de la elipse. Las únicas curvas que habían podido rectificarse en aquel entonces eran la espiral logarítmica por Evangelista Torricelli y la parábola cúbica por William Niel, alumno de Wallis. Wallis calcula la integral de expresiones de la forma  $(1-x^2)^n$ , con  $n$  natural y usa interpolación para aproximar  $\int_0^{\pi/2} (1-x^2)^{1/2} dx$  y así obtiene su famoso producto

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots} \quad (54)$$

Sus métodos, asegura, pueden usarse para rectificar cualquier curva algebraica. Wallis y Newton encuentran la longitud de arco del cuarto de elipse en forma de series. Jacob Bernoulli encuentra la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad (55)$$

en el estudio de la deflexión de una viga sujeto a presión en los extremos y la relaciona con la curva llamada lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

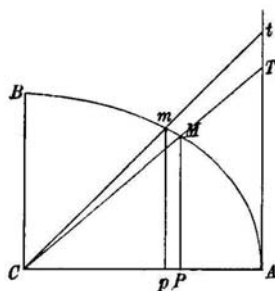


Fig. 1.

cuya longitud de arco de 0 a  $x$  es precisamente (55), por lo que se conoce como una integral lemniscata. Más adelante (1694), Jacob Bernoulli se encuentra con la integral del tipo

$$\int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

Euler trabajó toda su vida sobre las integrales elípticas las cuales deben su nombre al problema de calcular el arco de una elipse. Fagnano compiló sus propias investigaciones en *Produzioni matematiche*, en 1750. Un año después tocó a Euler revisar la obra. Fagnano prueba la fórmula de duplicación de la integral elíptica completa, lo cual motivó a Euler a trabajar arduamente y generalizar a la fórmula de la suma de las integrales completas, de donde se obtiene como caso particular la fórmula de Fagnano. En [7] Euler da la longitud de arco de un cuarto de elipse (ver Figura 2.5) en forma de serie

$$AMB = \frac{\pi b}{2} \times \left( 1 + \frac{1 \cdot n}{2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot n^2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n^3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n^3}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 6} + \dots \right)$$

Euler conocía ejemplos en los que a pesar de que las integrales del tipo (53) fuesen ser trascendentes, la solución de la ecuación integral pudiera dar soluciones alge-

braicas; como ejemplo en la ecuación

$$\frac{mdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^2}}$$

con  $m, n$  enteros positivos, *todas* sus soluciones son algebraicas, pues aunque cada integral por separado se integra en forma trascendente

$$m\theta = n\phi + \lambda,$$

donde  $\lambda$  es una constate de integración y  $\theta, \phi$  los arcos senos de  $x, y$  respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} m\theta \\ n\phi \end{array} \right\} \text{ es un polinomio en las variables } \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \theta \\ \phi \end{array} \right\}$$

luego la solución es algebraica en  $x, y$

Euler distingue del problema de que alguna solución particular sea algebraica, a que todas las soluciones sean algebraicas. Por ejemplo, la ecuación  $dy = dx + (y - x)dx$  claramente es satisfecha por  $y = x$  que es algebraica, sin embargo la solución general  $y = x + ae^x$  es trascendente a menos que  $a = 0$ .

El método que Euler usa para abordar la ecuación integral (53) o en notación simplificada (60), que se presenta más adelante, es muy similar al que usa para resolver

$$mdx/\sqrt{1-x^4} = ndy/\sqrt{1-y^4} \quad (56)$$

en [8], por ello haremos un breve análisis antes de continuar.

Euler comienza por dar la solución en el caso  $m = n = 1$ :

TEOREMA[8, p.41]

*Digo que la integral completa de la ecuación*

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

es

$$x^2 + y^2 + cx^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}. \quad (57)$$

Primero muestra que  $x = y$  es una solución después que

$$x = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}} \quad \text{o sea} \quad x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

es también solución. Inspirado en ello es que propone (57) como solución general. Primero toma la diferencial de la solución propuesta

$$dx(x + c^2x^2y^2 - y\sqrt{1-c^4}) = dy(y + cx^2y^2 - x\sqrt{1-c^4}) \quad (58)$$

luego despeja a  $x$  e  $y$  de la integral (57)

$$y = \frac{x\sqrt{1-c^4} + c\sqrt{1-x^4}}{1+cx^2} \quad \& \quad x = \frac{y\sqrt{1-c^4} - c\sqrt{1-y^4}}{1+cy^2}$$

el signo correcto lo elige para que si  $x = 0$  ambas fórmulas den el mismo valor  $y = c$ .  
Con ello

$$\begin{aligned} x + cx^2y^2 - y\sqrt{1-c^4} &= -c\sqrt{1-y^4} \\ \& \quad y + cx^2y^2 - x\sqrt{1-c^4} &= c\sqrt{1-x^4} \end{aligned}$$

que al ser sustituidos en la diferencial (58) da

$$-cdx\sqrt{1-y^4} + cdy\sqrt{1-x^4} = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{1-y^4}$$

Por lo tanto la integral completa es

$$x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4}$$

donde  $c$  es una constante arbitraria ( $|c| \leq 1$ ).

Q.E.D.

Euler afirma que mostrará un método para resolver la ecuación más general (56) conociendo la solución del caso  $m = n = 1$ . En realidad el método al que se refiere es el teorema de adición de la longitud de arco de la lemniscata y más generalmente de adición de las integrales elípticas.

Con más precisión, cuando dicha curva se parametriza por el radio  $r$

$$x = \sqrt{\frac{r^2 - r^4}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{r^2 + r^4}{2}}$$

entonces  $\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$  es la longitud de arco de la lemniscata. Fagnano, inspirado en la sustitución  $x = \frac{2t}{1+t^2}$  que racionaliza la integral de longitud de arco de la circunferencia  $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  y que reduce la integral a

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \int_0^t \frac{dt}{1+t^2},$$

intenta el cambio de variable en la integral lemniscata con el resultado:

$$r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4}, \quad \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

que no parece mostrar avance, sin embargo una nueva sustitución consigue:

$$t^2 = \frac{2u^2}{1-u^4}, \quad \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \sqrt{2} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

con lo cual el cambio de variable compuesto consigue:

$$r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}, \quad \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2 \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \quad (59)$$

Esta expresión es la fórmula de duplicación de la longitud de arco de la lemniscata obtenida por Fagnano y debe entenderse como sigue: dado que los cuadrados de las coordenadas de un punto  $P = (x(r), y(r))$  para un valor del parámetro  $r$ , son funciones racionales de  $r^2$ , que a su vez es función racional de  $u^2$ , entonces  $x^2 = f(\xi^2, \eta^2)$  y  $y^2 = g(\xi^2, \eta^2)$ , donde  $Q = (\xi(u), \eta(u))$  el punto sobre la lemniscata que corresponda al parámetro  $u$ . El arco lemniscático  $OP$  es entonces el doble del arco  $OQ$ .

Euler generaliza el resultado de Fagnano de manera brillante; manteniendo la notación anterior,

$$r = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2},$$

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}.$$

En el mismo trabajo generaliza la fórmula de adición a integrales más generales como

$$\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{P(u)}} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{P(v)}}, \quad r = \frac{u\sqrt{P(v)} + v\sqrt{P(u)}}{1 - nu^2v^2}$$

para la cuártica general  $P(t) = 1 + mu^2 + nu^4$  a la cual se reduce el polinomio general de cuarto grado después de una transformación de Möbius.

## 2.7. El problema de las curvas algebraicas (1768)

El trabajo [5] que lleva el larguísimo nombre de

PROBLEME. UN CORPS ÉTANT ATTIRÉ EN RAISON RÉCIPROQUE QUARRÉE DES DISTANCES VERS DEUX POINTS FIXES DONNÉS, TROUVER LES CAS OÙ LA COURBE DÉCRITE PAR CE CORPS SERÁ ALGÉBRIQUE

pretende responder a la cuestión de si existen soluciones al problema plano de los centros fijos que sean curvas algebraicas. Las soluciones elípticas e hiperbólicas que previamente había encontrado son un caso particular. Se puede conjeturar que el estudio del este problema motivó a Euler a estudiar con profundidad las integrales elípticas, en particular las llamadas integrales lemniscáticas que se discuten en la siguiente sección. El trabajo de Euler [6] se considera fundamental en el estudio de las funciones elípticas, junto con las contribuciones de Legendre, Abel, Gauss y Weierstrass.

### 2.7.1. Reducción de la ecuación integral

Al final de § 2.5.3, particularmente (53), Euler ha reducido el problema a investigar las condiciones bajo las cuales la cuadratura

$$\frac{dr}{\sqrt{\alpha r + 2Er^2 + Cr^3}} = \frac{ds}{\sqrt{\gamma s + 2Es^2 + \delta s^3}}, \quad (60)$$

donde

$$\alpha = A + B + D; \quad C = D - A - B; \quad \gamma = B - A - D; \quad \delta = A - B - D, \quad (61)$$

admite una solución algebraica. Euler afirma que si los denominadores tienen la misma forma entonces la razón entre  $r$  y  $s$  se puede expresar algebraicamente. Por tanto esto ocurre, si  $\alpha = \gamma$  y  $C = \delta$ ; pero esto solo es posible si  $A = 0$  y  $D = 0$ , es decir cuando el cuerpo  $M$  es atraído tan solo el cuerpo  $B$ , lo cual es ya conocido.

La semejanza de lo denominadores se puede aprovechar más generalmente haciendo el cambio de variables

$$r = mx, \quad s = ny \quad (62)$$

la cuadratura se escribe

$$\frac{dx\sqrt{\gamma}m}{\sqrt{\alpha\gamma x + 2E\gamma mx^2 + C\gamma m^2 x^3}} = \frac{dy\sqrt{\alpha}n}{\sqrt{\alpha\gamma y + 2E\alpha ny^2 + \alpha\delta n^2 y^3}} \quad (63)$$

Los denominadores son semejantes si (se supone  $E \neq 0$ )  $\gamma m = \alpha n$  &  $C\gamma m^2 = \alpha\delta n^2$  de donde se sigue que

$$C\gamma = \alpha\delta \frac{n^2}{m^2} = \alpha\delta \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 C = \alpha\delta \gamma^2 \Rightarrow \alpha C = \gamma\delta$$

o sustituyendo los valores (61) se obtiene  $DD - (A + B)^2 = DD - (B - A)^2$  de donde se sigue que  $A = 0$  ó  $B = 0$  (en el original dice  $P = 0$ ), pero estos son casos ya conocido en los que  $M$  es atraído por un sólo cuerpo.

Otro caso sencillo es  $E = 0$  & en cuyo caso para que los denominadores sean semejantes es suficiente que  $C\gamma m^2 = \alpha\delta n^2$ ; en este caso Euler toma  $m^2 = \alpha\delta k$ ,  $n^2 = C\gamma k$  – o sea que el cambio de variables (62) es  $r = x\sqrt{\alpha\delta k}$ , &  $s = y\sqrt{C\gamma k}$ , y la integral (60) se reduce a

$$\frac{dx\sqrt[4]{\gamma\delta}}{\sqrt{x + C\delta kx^3}} = \frac{dy\sqrt[4]{\alpha C}}{\sqrt{y + C\delta ky^3}} \quad (64)$$

en donde los denominadores son semejantes. Para que la curva sea algebraica, además de ello es necesario que los numeradores sean conmensurables:  $\gamma\delta : \alpha\delta = \mu^4 : \nu^4$ ,

siendo  $\mu, \nu$  números enteros (positivos). Equivalentemente, usando (61) la condición para que las curvas sean algebraicas es en este caso

$$E = 0, \quad \& \quad DD = AA + BB + \frac{2AB(\mu^4 + \nu^4)}{\mu^4 - \nu^4}.$$

(aunque Euler no lo menciona, el caso  $\mu = \nu$  corresponde al caso ya conocido  $A = 0$  o  $B = 0$ ). Introduciendo el parámetro  $h$  por  $k = \frac{h}{C\delta}$ , la integral se reduce a

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{x + hx^3}} = \frac{\nu dy}{\sqrt{y + hy^3}}. \quad (65)$$

En este punto, Euler menciona en relación a esta ecuación que él ha demostrado en otra parte que su integral y también la completa (se refiere a la integral indefinida) es algebraica, pero que esta integral será tanto más complicado pues la razón de los números  $\mu$  y  $\nu$  será compuesta y por lo tanto amerita de ser desarrollado más en detalle. En lo sucesivo supone  $h = 1$ .

El caso  $\mu = \nu = 1$  es resuelto tanto en [3] como en [5]. En [3] es la solución completa al problema; en [5] es el caso inicial, a partir del cual desarrolla su método para los casos  $\mu = 2$  &  $\nu = 1$  y  $\mu = 3$  &  $\nu = 1$ . Con ello pretende ilustrar el método general para cualesquiera valores enteros positivos  $\mu$  y  $\nu$ . El método presentado a continuación para un caso particular lo usa Euler en más de un trabajo.

## 2.8. La ecuación integral reducida

Como ya se comentó en § 2.6, particularmente en el párrafo anterior a (57), para resolver la ecuación integral

$$\frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y + y^3}}, \quad (66)$$

Euler supone una integral de la forma

$$0 = \mathcal{U} + 2\mathcal{B}(x + y) + \mathcal{C}(x^2 + y^2) + 2\mathcal{D}xy + 2\mathcal{E}xy(x + y) + \mathcal{F}x^2y^2. \quad (67)$$



Usa simultáneamente la forma funcional obtenida al despejar de la ecuación cuadrática a  $x$  y a  $y$  (observe la elección de signos y la definición dual de  $X$  e  $Y$ ):

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-\mathcal{B} - \mathcal{D}y - \mathcal{E}y^2}{\mathcal{C} + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F}y^2} + \\
 &\quad + \frac{\sqrt{(\mathcal{B} + \mathcal{D}y + \mathcal{E}y^2)^2 - (\mathcal{U} + 2\mathcal{B}y + \mathcal{C}y^2)(\mathcal{C} + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F}y^2)}}{\mathcal{C} + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F}y^2} \\
 &\equiv \frac{-\mathcal{B} - \mathcal{D}y - \mathcal{E}y^2 + Y}{\mathcal{C} + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F}y^2} \\
 y &= \frac{-\mathcal{B} - \mathcal{D}x - \mathcal{E}x^2}{\mathcal{C} + 2\mathcal{E}x + \mathcal{F}x^2} - \\
 &\quad - \frac{\sqrt{(\mathcal{B} + \mathcal{D}x + \mathcal{E}x^2)^2 - (\mathcal{U} + 2\mathcal{B}x + \mathcal{C}x^2)(\mathcal{C} + 2\mathcal{E}x + \mathcal{F}x^2)}}{\mathcal{C} + 2\mathcal{E}x + \mathcal{F}x^2} \\
 &\equiv \frac{-\mathcal{B} - \mathcal{D}x - \mathcal{E}x^2 - X}{\mathcal{C} + 2\mathcal{E}x + \mathcal{F}x^2}
 \end{aligned}$$

donde  $X, Y$  representa las raíces cuadradas que se indican. Por definición de  $Y$ , y de manera análoga para  $X$ ,

$$0 = x(\mathcal{C} + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F}y^2) - (-\mathcal{B} - \mathcal{D}y - \mathcal{E}y^2 + Y)$$

$$-X = \mathcal{B} + \mathcal{D}x + \mathcal{E}x^2 + \mathcal{C}y + 2\mathcal{E}xy + \mathcal{F}x^2y, \quad (68)$$

$$Y = \mathcal{B} + \mathcal{D}y + \mathcal{E}y^2 + \mathcal{C}x + 2\mathcal{E}xy + \mathcal{F}xy^2. \quad (69)$$

Diferenciando la solución supuesta (67)

$$\begin{aligned}
 0 &= dx(\mathcal{B} + \mathcal{C}x + \mathcal{D}y + 2\mathcal{E}xy + \mathcal{E}y^2 + \mathcal{F}xy^2) \\
 &\quad + dy(\mathcal{B} + \mathcal{C}y + \mathcal{D}x + 2\mathcal{E}xy + \mathcal{E}x^2 + \mathcal{F}x^2y) \\
 &= -dx X + dy Y
 \end{aligned}$$

o bien

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}. \quad (70)$$

Euler escribe

*Voilà donc une équation différentielle entre  $x$  &  $y$ , où les variables sont séparées, & dont l'intégralle est précisément l'équation algébrique supposée.*

Resta ahora encontrar una integral completa de la ecuación integral (70); como comentamos en la sección anterior, esta deberá contener una constante de integración arbitraria.

Se tiene entonces de la definición de  $X$  e  $Y$ ,

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{U}) - 2(\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{U}\mathcal{E})x \\ &\quad + (\mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2 - \mathcal{F}\mathcal{U} - 2\mathcal{B}\mathcal{E})x^2 \\ &\quad - 2(\mathcal{B}\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{D}\mathcal{E})x^3 + (\mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{F})x^4\}} \\ Y &= \sqrt{\{(\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{U}) - 2(\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{B}\mathcal{D} + \mathcal{U}\mathcal{E})y \\ &\quad + (\mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2 - \mathcal{F}\mathcal{U} - 2\mathcal{B}\mathcal{E})y^2 \\ &\quad - 2(\mathcal{B}\mathcal{F}\mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{D}\mathcal{E})y^3 + (\mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{F})y^4\}} \end{aligned}$$

Los términos constantes, cuadráticos y cuárticos pueden eliminarse escogiendo

$$\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{U} = 0 \quad \& \quad \mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2 - \mathcal{F}\mathcal{U} - 2\mathcal{B}\mathcal{E} = 0 \quad \& \quad \mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{F} = 0,$$

es decir

$$\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{C}\mathcal{U}}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}}, \quad \mathcal{D}^2 = \mathcal{C}^2 + 2\mathcal{B}\mathcal{E} + \mathcal{F}\mathcal{U},$$

o bien

$$\mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{C}\mathcal{U}}, \quad \& \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}}, \quad \& \quad \mathcal{D} = \pm(\mathcal{C} + \sqrt{\mathcal{F}\mathcal{U}}). \quad (71)$$

Por lo tanto será

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2x(\mathcal{B}\mathcal{D} - \mathcal{U}\mathcal{E} - \mathcal{B}\mathcal{C}) + 2x^3(\mathcal{D}\mathcal{E} - \mathcal{C}\mathcal{E} - \mathcal{B}\mathcal{F})} \\ &= \sqrt{\{2x(\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}} - \mathcal{U}\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}}) \\ &\quad + 2x^3(\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{F}\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}} - \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{C}\mathcal{F}})\}} \\ &= \sqrt{2(\mathcal{D}\sqrt{\mathcal{C}} - \sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{C}})(x\sqrt{\mathcal{U}} + x^3\mathcal{F})}. \end{aligned}$$

eligiendo  $\mathcal{D} = -(\mathcal{C} + \sqrt{\mathcal{U}\mathcal{F}})$ , se tiene

$$X = 2\sqrt{-(\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}\mathcal{F}} + \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{C}})(x\mathcal{U} + x^3\mathcal{F})}$$

y la expresión análoga para  $Y$ ,

$$Y = 2\sqrt{-(\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}\mathcal{F}} + \mathcal{C}\sqrt{\mathcal{C}})(y\mathcal{U} + y^3\mathcal{F})}$$

si ahora  $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ , tendremos que con

$$\mathcal{D} = -\mathcal{U} - \mathcal{C}, \quad \& \quad \mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}}, \quad \& \quad \mathcal{F} = \sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}},$$

$$\begin{aligned} X &= 2\sqrt{-(\sqrt{\mathcal{U}} + \mathcal{C})(x + x^3)\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}}} \\ Y &= 2\sqrt{-(\sqrt{\mathcal{U}} + \mathcal{C})(y + y^3)\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}}} \end{aligned}$$

y por lo tanto la ecuación integral a resolver es

$$\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y+y^3}} \quad (72)$$

y la integral (67) queda expresada como

$$0 = \mathcal{U} + 2(x+y)\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}} + \mathcal{C}(x^2+y^2) - 2(\mathcal{U}+\mathcal{C})xy + 2xy(x+y)\sqrt{\mathcal{U}\mathcal{C}} + \mathcal{U}x^2y^2.$$

Tomando  $\mathcal{C} = 1$ , &  $\mathcal{U} = n^2$  se obtiene la integral en la forma

$$0 = nn + 2n(x+y) + x^2 + y^2 - 2(1+nn)xy + 2nxy(x+y) + nnx^2y^2 \quad (73)$$

donde  $nn$  es una constante arbitraria y es por tanto la integral buscada.

Tomando  $n = -m$ , serán

$$\mathcal{U} = m^2; \mathcal{B} = m; \mathcal{C} = 1; \mathcal{D} = -1 - m^2; \mathcal{E} = -m; \mathcal{F} = m^2$$

y la integral

$$0 = m^2 - 2m(x+y) + x^2 + y^2 - 2(1+m^2)xy - 2mxy(x+y) + m^2x^2y^2 \quad (74)$$

de donde se concluye que

$$\begin{aligned} x &= \frac{m + (1+m^2)y + my^2 + 2\sqrt{(m+m^3)(y+y^3)}}{1-2my+m^2y^2}, \quad \& \\ y &= \frac{m + (1+m^2)x + mx^2 - 2\sqrt{(m+m^3)(x+x^3)}}{1-2mx+m^2x^2}, \end{aligned}$$

se podrá expresar algebraicamente a  $y$  por<sup>8</sup>  $x$  como  $x$  por  $y$ , para satisfacer la ecuación integral

$$\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y+y^3}},$$

Euler nota que la solución

$$y = \frac{m + (1+m^2)x + mx^2 - 2\sqrt{(m+m^3)(x+x^3)}}{1-2mx+m^2x^2}, \quad (75)$$

a la ecuación integral (66) se puede escribir

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi+\xi^3}} = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{\eta+\eta^3}} - \int_0^m \frac{d\mu}{\sqrt{\mu+\mu^3}} \quad (76)$$

---

<sup>8</sup>Diríamos que  $y$  es función algebraica de  $x$  y viceversa, sólo que el término "función" no se acuñaría sino mucho después

puesto que si pone  $x = 0$ ,  $y$  debe ser igual a  $m$ . En realidad Euler no escribe esta expresión, sino

$$\Pi.y = \Pi.x + \Pi.m \quad (77)$$

que equivale a

$$\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{\eta + \eta^3}} = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi + \xi^3}} + \int_0^m \frac{d\mu}{\sqrt{\mu + \mu^3}},$$

que es la fórmula de adición para la integral elíptica en cuestión; en (76),  $\Pi.k$  representa la integral definida desde 0 hasta  $k$ , para  $k = y, x$  ó  $m$  y  $y$  función de  $x, m$  mediante (75). En este sentido la notación  $\Pi$  hace resaltar el caracter funcional de la ecuación evitando las variables “mudas” de integración. Desde un punto de vista epistemológico, este episodio en la obra de Euler debe considerarse como uno *opera prima* del concepto de función.

### 2.8.1. La ecuación integral para $\mu = 2, \nu = 1$

Resumiendo de la sección anterior,

$$\begin{aligned} \Pi.y &= \Pi.x + \Pi.m \\ \Leftrightarrow y &= \frac{m + x + m^2x + mx^2 - 2\sqrt{(m + m^3)(x + x^3)}}{1 - 2mx + m^2x^2}. \end{aligned} \quad (78)$$

(note que  $y$  es función simétrica de  $x$  y  $m$ ).

Euler parte de (78) poniendo  $m = x$ ,

$$\begin{aligned} \Pi.y &= 2\Pi.x \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2x(1 + x^2) + 2(x + x^3)}{(1 - x^2)^2}. \end{aligned} \quad (79)$$

donde evidentemente falta cambiar el signo en el radical. Euler afirma que

*...où il est évident, qu'il faut changer de signe le radical, comme étant ambigu en soi-même...*

El signo ambiguo, argumenta Euler, puede evitarse considerando la ecuación implícita entre  $y, x$  y  $m$  de la cual (75) no es sino una rama,

$$(m - x)^2 - 2(m + x)(1 + mx)y + (1 - mx)^2y^2 = 0.$$

(note la simetría en los coeficientes de  $y$ ). En conclusión: la ecuación integral

$$\frac{2dx}{\sqrt{x + x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y + y^3}}$$

tiene por solución

$$y = \frac{4(x + x^3)}{(1 - x^2)^2}.$$

### 2.8.2. La ecuación integral para $\mu = 3, \nu = 1$

Euler considera las ecuaciones

$$\Pi.y = \Pi.z + \Pi.m \quad (80)$$

$$\Pi.z = 2\Pi.x \quad (81)$$

La primera tiene por solución

$$y = \frac{m + (1 + m^2)z + mz^2 \pm 2\sqrt{(m + m^3)(z + z^3)}}{1 - 2mz + m^2z^2}, \quad (82)$$

y del apartado anterior, la segunda ecuación tiene por solución

$$z = \frac{4x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}. \quad (83)$$

Poniendo  $m = x$  en (80) y con (81), se tiene

$$\Pi.y = \Pi.z + \Pi.x$$

$$\Pi.z = 2\Pi.x$$

es decir

$$\Pi.y = 2\Pi.x + \Pi.x$$

que tiene por solución (82) con (83), es decir

Sustituyendo esta expresión en la anterior se obtiene

$$y = \frac{x + (1 + x^2)z + xz^2 \pm 2\sqrt{(x + x^3)(z + z^3)}}{1 - 2xz + x^2z^2}$$

$$z = \frac{4x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}$$

o bien, eligiendo el signo  $(-)$  menos en el radical

$$y = \frac{x(3 + 6x^2 - x^4)^2}{(1 - 6x^2 - 3x^4)^2}.$$

(el signo  $(+)$  da  $y = x$ , que evidentemente no es solución), que es la solución de la ecuación integral

$$\frac{3dx}{\sqrt{x + x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y + y^3}}.$$

Los argumentos esgrimidos muestran cómo se puede resolver el caso general de manera inductiva. Euler aborda aún el caso de la ecuación integral

$$\frac{4dx}{\sqrt{x + x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{y + y^3}},$$

pero no lo haremos aquí.

### 2.8.3. La ecuación integral para $\mu, \nu$ enteros

La ecuación propuesta, con  $\mu, \nu$  enteros positivos, se obtiene resolviendo

$$\frac{\mu dx}{\sqrt{x+x^3}} = \frac{dz}{\sqrt{z+z^3}} \quad \& \quad \frac{\nu dy}{\sqrt{y+y^3}} = \frac{dz}{\sqrt{z+z^3}}$$

por el método esbozado en las secciones anteriores. Eliminando  $z$  se obtiene entonces la solución  $y$  en función (multivaluada) de  $x$ .

## 2.9. De motu corporis (1767)

En el Motu Corporis de 1767, Euler generaliza sus métodos para el problema espacial de los centros fijos. Analizaremos el trabajo al que se hace referencia con menos detalle que los anteriores con el fin de resaltar las principales y nuevas aportaciones.

Para comenzar introduce el sistema de coordenadas como se muestra en la Figura 2.6. La distancia entre las masas  $A$  y  $B$  es  $a$ . Después de un largo proceso de

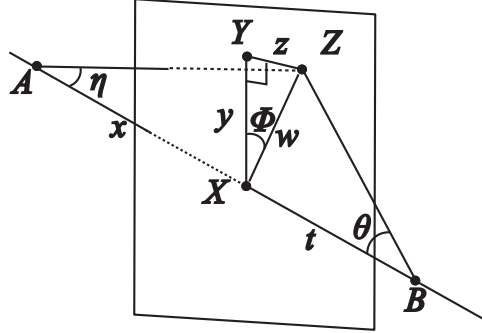


Figura 2.6: Sistema de coordenadas para el problema espacial de los centros fijos

combinar las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} &= -\frac{Ax}{v^3} + \frac{Bx}{u^3} \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} &= -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3} \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} &= -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3}, \end{aligned}$$

encuentra las tres integrales de movimiento

$$y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = \alpha^{-1}, \quad (84)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx^2}{d\tau^2} + \frac{dy^2}{d\tau^2} + \frac{dz^2}{d\tau^2} \right) = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}, \quad (85)$$

$$\begin{aligned} & \left( x \frac{dy}{d\tau} - y \frac{dx}{d\tau} \right) \left( t \frac{dy}{d\tau} - y \frac{t}{d\tau} \right) \\ & + \left( x \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dx}{d\tau} \right) \left( t \frac{dz}{d\tau} - z \frac{t}{d\tau} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

$$= a \left( \frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D \right). \quad (87)$$

La primera es la componente del momento angular en la dirección de la línea  $AB$ ; la segunda es la integral de energía y la tercera es una generalización de la integral de Euler al caso espacial. Las constantes arbitrarias son  $\alpha$ ,  $C$  y  $D$ . El tiempo lo elimina reduciendo el problema a dos ecuaciones que en la notación de formas diferenciales de Euler son

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\alpha^2(ydz - zdy)^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(xdy - ydx)(tdy - ydt) + (xdz - zdx)(tdz - zdt)}{\alpha^2(ydz - zdy)^2} \\ & = a \left( \frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Euler reduce la dimensión del problema introduciendo las coordenadas  $w$ ,  $\Phi$  como se muestran en la Figura 2.6; entonces  $d\tau = \alpha w^2 d\Phi$  (o sea  $w^2 \frac{d\Phi}{d\tau} = \alpha^{-1}$ ) de donde las integrales (88) y (89) se escriben como

$$\frac{dx^2 + dw^2 + w^2 d\Phi^2}{2\alpha^2 w^4 d\Phi^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$$

$$\begin{aligned} & \frac{txdw^2 + txw^2 d\Phi^2 - (xdt - tdx)wdw + w^2 dt dx}{\alpha^2 w^4 d\Phi^2} \\ & = a \left( \frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D \right) \end{aligned}$$

y de aquí elimina  $d\Phi$

$$\begin{aligned} d\Phi^2 &= \frac{dx^2 + dw^2}{2\alpha^2 w^4 \left( \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} \right) - w^2} \\ d\Phi^2 &= \frac{txdw^2 - (xdt + tdx)wdw + w^2 dt dx}{\alpha^2 a w^4 \left( \frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D \right) - txw^2} \end{aligned}$$

Euler consigue efectuar la separación de variables mediante los sucesivos cambios de coordenadas que se indican, muy similares a los que usó en el caso 2D:

Primero introduce los ángulos  $\eta, \theta$  que se indican en la Figura 2.6

$$\tan \theta = \frac{w}{t}, \quad \tan \eta = \frac{w}{x}$$

En seguida las variables  $p, q$

$$\tan \frac{1}{2}\eta = \sqrt{pq}, \quad \tan \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

resultando en la ecuación integral

$$\begin{aligned} dp^2 (4m(B-A)q(1-q^2) + 8mCq^2 - 4mDq(1+q)^2 - (1-q^2)) = \\ dq^2 (4m(A+B)p(1-p^2) + 8mCp^2 + 4mDp(1-p^2) - (1-p^2)). \end{aligned}$$

Aquí las variables quedan separadas. Euler va un paso más introduciendo las variables  $u, v$  tales que

$$v + u = \frac{a(1+p)}{1-p}, \quad v - u = \frac{a(1-q)}{1+q}$$

y después  $s$  y  $t$ ,

$$v = \frac{1}{2}a(r+s), \quad u = \frac{1}{2}a(r-s)$$

la ecuación integral es

$$\frac{dr}{\sqrt{m(r^2-1)(2(B+A)r + C(r^2-1) + 2D) - 2r^2}} = \frac{ds}{\sqrt{m(1-s^2)(2(B-A)s + C(1-s^2) - 2D) - 2s^2}}.$$

donde  $m = a\alpha^2$ . Este es el tipo de integral que ya ha estudiado Euler en anteriores trabajos [6].

El caso  $m = \infty$  corresponde a  $\alpha = \infty$  es decir la componente del momento angular en la dirección del eje de los primarios es cero y el movimiento se realiza en un plano fijo que contiene a los primarios. Este es un caso que Euler analiza, pues



debe reducirse al caso  $2D$  estudiado en [3]. Nuevamente repite los casos en los que el movimiento es elíptico e hiperbólico, aunque de una manera más simplificada.

Euler analiza cuando en el caso  $3D$ , el movimiento se realiza sobre un esferoide elíptico y sobre un *conoide hiperbólico* que llamaríamos ahora hiperboloide de dos hojas.

Finalmente Euler analiza el caso en el que una de las masas es cero, problema harto conocido.

## 2.10. La solución de Jacobi de los dos centros fijos

Jacobi aborda la solución del problema de los centros fijos en su tratado de Mecánica *Vorlesung der Dynamik*. En [14][§26] introduce sus coordenadas elípticas confocales en  $\mathbb{R}^n$ . Habiendo desarrollado lo que llamaríamos la teoría de Hamilton–Jacobi, la solución de Jacobi pasa por escribir el Hamiltoniano del problema de los centros fijos en coordenadas elípticas confocales y muestra que en esas coordenadas la ecuación de HJ es separable. Es natural hacer la hipótesis de que las coordenadas introducidas por Jacobi están inspiradas en las soluciones elíptica e hiperbólicas encontradas por Euler en el caso  $2D$ , el movimiento sobre un esferoide elíptico o sobre un cono parabólico en el caso  $3D$ . Jacobi aborda también la solución del problema de cualquier número de centros fijos sobre una línea, mostrando la separabilidad de la ecuación de HJ. También aborda el problema de Lagrange de los centros fijos en el que se incluye además una fuerza elástica dirigida al centro, problema que ya se había mostrado se podía reducir a cuadraturas. Con el fin de completar el desarrollo histórico de este problema. Vamos a resumir brevemente el aporte de Jacobi a este problema.

### 2.10.1. La ecuación de Hamilton–Jacobi

En esta sección vamos a resumir de manera muy breve el método de Hamilton–Jacobi para integrar las ecuaciones de movimiento. Por simplicidad consideremos un sistema Hamiltoniano independiente del tiempo y dependiendo de coordenadas generalizadas  $H(q_i, p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

mantienen su forma canónica bajo transformaciones de coordenadas

$$Q_j = Q_j(q_i, p_i), \quad P_j = P_j(q_i, p_i), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

llamadas canónicas o *simpléticas* que están caracterizadas por la propiedad de que preservan la forma simpléctica:  $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^n dP_i \wedge dQ_i$ . Una clase importante de transformaciones de coordenadas simpléticas son aquellas generadas por

una función escalar de la forma  $W(q, P)$ , llamada *función característica de Hamilton*, donde

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial W}{\partial P_i}(q, P) \\ p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}(q, P). \end{aligned} \quad (90)$$

Bajo la condición de que  $W$  sea una función con segundas derivadas parciales continuas en una región del espacio fase  $q - P$ , y

$$\det \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial P_j} \right) \neq 0 \quad (91)$$

será posible despejar  $q_i = q_i(Q, P)$  de la primera ecuación, y en la segunda se tendrá  $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(q(Q, P), P)$ ; es decir definirá la transformación  $q_i = q_i(Q, P)$ ,  $p_i = p_i(Q, P)$ . Esta transformación es canónica como puede verificar el lector como ejercicio.

El método de Hamilton–Jacobi (HJ en lo sucesivo) consiste en lo siguiente: Suponga que  $Q_i, P_i$  son las coordenadas originales; la integración de las ecuaciones de movimiento se traduce al problema a encontrar una función característica  $W(q, P)$  tal que la transformación de coordenadas (90) haga que el Hamiltoniano transformado a las nuevas coordenadas  $(q, p)$

$$H \left( q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) = h \quad (92)$$

sea una función constante (que debe ser la energía  $h$  pues el sistema es conservativo); en tal se tendrá  $\dot{q}_i = \dot{p}_i = 0$ , por lo que las posiciones y momentos son constantes en las nuevas coordenadas:  $p_i = \alpha_i$ ,  $q_i = \beta_i$ .

La expresión (92) es una ecuación diferencial parcial para la función generadora se llama la ecuación de Hamilton–Jacobi. En general, las coordenadas generalizadas se introducen a modo que dicha EDP sea separable, por ejemplo.

### 2.10.2. Coordenadas elípticas

Jacobi introduce las coordenadas elípticas confocales en toda su generalidad para  $\mathbb{R}^n$ . Por simplicidad vamos a considerar el caso  $2D$ , que ilustra bien el caso general. Considere la familia de cónicas confocales

$$Q = \frac{x_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 + \lambda} - 1 = 0 \quad (93)$$

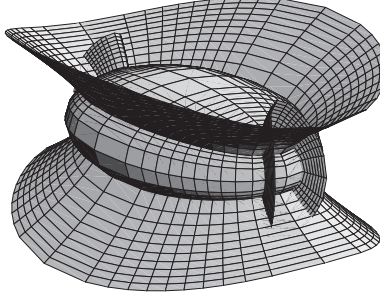


Figura 2.7: Familias de cuádricas confocales

con la condición  $0 < a_2 < a_1$ . El polinomio

$$P(\lambda) = (a_1 + \lambda)(a_2 + \lambda)Q$$

tiene discriminante  $\Delta = (x_1^2 - a_1 + a_2)^2 + 2(a_1 - a_2 + x_1^2)x_2^2 + x_2^4 > 0$  por lo tanto sus raíces  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales. De hecho  $P(-a_1) = (-a_1 + a_2)x_1^2 < 0$ ,  $P(-a_2) = (a_1 - a_2)x_2^2 > 0$  por lo que las raíces satisfacen  $-a_1 < \lambda_2 < -a_2 < \lambda_1$ . Las coordenadas elípticas de Jacobi asocian al punto de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$  las raíces  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , de modo que

$$x_1^2 = \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}{(a_1 - a_2)}, \quad x_2^2 = \frac{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)}{(a_2 - a_1)}. \quad (94)$$

Par un valor  $\lambda = \lambda_1$ ,  $a_1 + \lambda_1 > 0$  y  $a_2 + \lambda_1 > 0$  por lo que (93) define una elipse; para  $\lambda = \lambda_2$  (93) define una hipérbola. Así cada punto de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$  se ve como la intersección de una elipse y una hipérbola. La situación en tres dimensiones se muestra en la Figura 2.7 donde cada punto en el espacio de obtiene como intersección de cuádricas confocales. A partir de (94) se deducen los coeficientes métricos

$$M_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)}, \quad M_2 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)}$$

de modo que el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - U(x_1, x_2) = \frac{1}{8}(M_1 \dot{\lambda}_1^2 + M_2 \dot{\lambda}_2^2) - U(\lambda_1, \lambda_2).$$

Para calcular el Hamiltoniano, primero se calculan mediante la transformada de Legendre, los momentos conjugados a  $\lambda_1, \lambda_2$

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_1} = \frac{1}{4} M_1 \dot{\lambda}_1, \\ \Lambda_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_2} = \frac{1}{4} M_2 \dot{\lambda}_2 \end{aligned}$$

y el Hamiltoniano resulta

$$H = \dot{\lambda}_1 \Lambda_1 + \dot{\lambda}_2 \Lambda_2 - U(\lambda_1, \Lambda_2) = \frac{2}{M_1} \Lambda_1^2 + \frac{2}{M_2} \Lambda_2^2 + U(\lambda_1, \Lambda_2)$$

A partir de esta expresión se obtiene la ecuación de HJ para el problema 2D de los dos centros fijos

$$\begin{aligned} \frac{2(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{2(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)}{\lambda_2 + \lambda_1} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)^2 \\ = U(\lambda_1, \lambda_2) + h. \quad (95) \end{aligned}$$

Resta expresar el potencial en función de las coordenadas elípticas. Para ello supon- gamos que los centros fijos se encuentran sobre el eje  $x_1$  en  $(-f, 0)$  y  $(f, 0)$ . Las distancias de los 2 centros con respecto al punto de atracción será  $r_1$  y  $r_2$ , entonces tenemos

$$r_1^2 = (x_2 + f)^2 + x_1^2, \quad r_2^2 = (x_2 - f)^2 + x_1^2,$$

ó

$$r_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + f^2 + 2fx_2, \quad r_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + f^2 - 2fx_2.$$

Una característica fundamental de la elipse es

$$f^2 = (a_2 + \lambda_1) - (a_1 + \lambda_1) = a_2 - a_1.$$

la transformación (94) nos da la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 = a_1 + a_2 + \lambda_1 + \lambda_2;$$

por ello

$$\begin{aligned} r_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + f^2 + 2fx_2 &= 2a_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ &\quad + 2\sqrt{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)} \\ &= \{\sqrt{a_2 + \lambda_1} + \sqrt{a_2 + \lambda_2}\}^2, \\ r_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + f^2 - 2fx_2 &= 2a_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ &\quad - 2\sqrt{(a_2 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_2)} \\ &= \{\sqrt{a_2 + \lambda_1} - \sqrt{a_2 + \lambda_2}\}^2, \end{aligned}$$

entonces

$$r_1 = \sqrt{a_2 + \lambda_1} + \sqrt{a_2 + \lambda_2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2 + \lambda_1} - \sqrt{a_2 + \lambda_2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en el potencial

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{r_1 r_2}$$

entonces,

$$U = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{a_2 + \lambda_1} - (m_1 - m_2)\sqrt{a_2 + \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Poniendo este valor de  $U$  en la ecuación diferencial parcial (95) y multiplicando por  $\lambda_1 - \lambda_2$  entonces tenemos:

$$\begin{aligned} (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1) \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right)^2 - (a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2) \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)^2 &= \frac{1}{2} h \lambda_1 \\ &+ \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \sqrt{a_2 + \lambda_1} - \frac{1}{2} h \lambda_2 + \frac{1}{2} (m_1 - m_2) \sqrt{a_2 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Esta es una ecuación es de variable separables y se puede resolver con la introducción de una constante arbitraria  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right)^2 &= \frac{\frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \sqrt{a_2 + \lambda_1} + \beta}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)}, \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)^2 &= \frac{\frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \sqrt{a_2 + \lambda_2} + \beta}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

de donde, integrando

$$\begin{aligned} W = \int d\lambda_1 \frac{\frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \sqrt{a_2 + \lambda_1} + \beta}{(a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)} \\ + \int d\lambda_2 \frac{\frac{1}{2} \lambda_2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \sqrt{a_2 + \lambda_2} + \beta}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

En cada integral se puede racionalizar introduciendo

$$\sqrt{a_2 + \lambda_1} = p, \quad \sqrt{a_2 + \lambda_2} = q,$$

de donde

$$\begin{aligned} W = \int dp \frac{2(hp^2 + (m_1 + m_2)p + 2\beta - ha_2)}{p^2 - f^2} + \\ \int dq \frac{2(hq^2 + (m_1 + m_2)q + 2\beta - ha_2)}{p^2 - f^2}. \end{aligned}$$

Con esto las ecuaciones se pueden integrar por el método ya descrito.

## Agradecimientos

Los autores fueron parcialmente apoyados por el proyecto sectorial SEP-CONACYT SEP-2004-C-01-47768.



# Bibliografía

- [1] The Euler Archive. <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>. Contiene todos los trabajos conocidos de Euler en formato pdf, se denotan con el índice de Eneström por **E001-E886**.
- [2] GARCÍA, A. Euler y la Mecánica Celeste. Por aparecer en *Miscelánea Matemática*.
- [3] EULER, L. De motvu corporis ad dvo centra virium fixa attracti. En *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **10**, 1766, 207-242 . Código **E301**
- [4] *Ibid.* De motvu corporis ad dvo centra virium fixa attracti. En *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **11**, 1767, pp. 152-184. Código **E328**.
- [5] *Ibid.* Probleme. Un corps etant attiré en raison reciproque quaree des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas ou la courbe décrite par ce corps sera algébrique. En *Memoires de L'Academie de Sciences de Berlin* **16**, 1767, 228-249. En The Euler Archive: Código **E337**.
- [6] *Ibid.* Integratio aequationis  $\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}$ . En *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **12**, 1768, 3-16. Código **E345**.
- [7] *Ibid.* Specimen de constructione aequationum differentialium sine indeterminatarum separatione. En *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **6**, 1738, pp. 168-174. Indice Eneström **E28**.
- [8] *Ibid.* De integratione Aequationis Differentialis  $mdx/\sqrt{(1-x^4)} = ndy/\sqrt{(1-y^4)}$ . **E251**. Ver también la traducción del latín al inglés por Stacy Langton, Universidad de San Diego, 1999. "On the integration of the differential equation  $mdx/\sqrt{(1-x^4)} = ndy/\sqrt{(1-y^4)}$  by Leonhard Euler"
- [9] ABEL, N. H., Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, herausgegeben von Crelle, Bf. 2,3 Berlin 2827, 1828.

- 
- [10] SANDIFER, C. E., Arc length of an ellipse. How Euler Did It (en referencia a **E028** del índice Eneström). Publicación en línea de *The Mathematical Association of America (MMA)*. Liga desde <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>.
- [11] LEGENDRE, A-M *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, Tome troisième, pp. 411–517, Huzard–Courcier, Paris (1828). Disponible en versión PDF en en Gallica-Math: <http://gallica.bnf.fr/ark:12148/bpt6k110149h>
- [12] SANDIFER, C. E., *How Euler Did it*. The Mathematical Association of America (MMA) Julio 3, 2007.
- [13] ZALDÍVAR, F., por aparecer en *Miscelánea Matemática*, 2007.
- [14] JACOBI, C.G., *Vorlesung der Dynamik*. Disponible en versión PDF en Gallica-Math: *Œuvres complètes*. [http://math-doc.ujf-grenoble.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE\\_JACOBI\\_\\_8](http://math-doc.ujf-grenoble.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_JACOBI__8)
- [15] VARADARAJAN, V.S., *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*. AMS, 2006.



## Capítulo 3

# La hidrodinámica de Euler

*En el cosmos de  
la Hidrodinámica,  
Newton es el Urano,  
Daniel Bernoulli el Cronos,  
y Euler el Zeus.*

*Truesdell [1].*

Jorge A. Esquivel Avila<sup>1</sup> y Marisela Guzmán Gómez<sup>2</sup>

### Resumen

Dentro de un marco histórico, se muestran algunos conceptos básicos que sustentan a la mecánica de cuerpos deformables o mecánica de medios continuos, y en particular a las ecuaciones de la hidrodinámica, conocidas como ecuaciones de Euler. Se presentan las descripciones espacial y material del movimiento, llamadas Euleriana y Lagrangiana, respectivamente. Se exponen las leyes de balance de la cantidad del movimiento lineal y angular o leyes de Euler. Se habla de la ecuación de Bernoulli y de la paradoja de D'Alembert. Finalmente, se discute uno de los problemas del milenio en matemáticas relacionado con la hidrodinámica.

---

<sup>1</sup>Análisis Matemático, Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco,  
jaea@correo.azc.uam.mx

<sup>2</sup>Análisis Matemático, Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco,  
mkg@correo.azc.uam.mx

### 3.1. Introducción

Problemas tales como: entender el vuelo de un insecto, el desplazamiento de un pez, el movimiento de un tornado o de un huracán, el deslizamiento de un glaciar o bien determinar la fuerza que la corriente de un río ejerce sobre las columnas de un puente, diseñar un barco o los perfiles de las alas de un avión, involucran el entendimiento del movimiento del agua, aceite, aire o gas ante la acción de fuerzas. Esta motivación ha servido para intentar entender las leyes de la naturaleza, y emplearlas para poder predecir su respuesta. Con el propósito de discernir en forma clara y precisa el comportamiento de ciertos fenómenos, es como nació la hidrodinámica, o en forma más general la dinámica de fluidos. La historia ha mostrado que empleando matemáticas se ha podido tener éxito y avanzar hacia ese objetivo. Se debe a uno de los más grandes matemáticos en la historia, Leonhard Euler, la creación de una teoría actualmente vigente.

La referencia más antigua sobre el tema se encuentra en los trabajos de Arquímedes sobre la flotación de cuerpos, 250 años antes de nuestra era. En ella, se menciona la existencia de fuerzas internas, concepto llamado actualmente presión y que sólo Euler logró concretar matemáticamente. Después de Arquímedes, en relación a este concepto, encontramos el principio de solidificación o congelación de Simon Stevin, en 1586, que resulta en una forma de calcular la presión en líquidos sin movimiento. A pesar de sus logros, estos resultados que sólo se refieren al estudio de las fuerzas en fluidos en reposo, hidrostática, no lograron dar un concepto claro de presión interna. Se pueden agregar más nombres, sin embargo sus aportes fueron menores. En 1687, fue Isaac Newton el primero en abordar problemas de dinámica de fluidos. El segundo volumen de sus *Philosophiae naturalis principia mathematica*, está dedicado a ello. El éxito logrado en su primer volumen sobre la mecánica de partículas, no se repitió en el segundo. En el prefacio escribió su deseo de poder derivar los fenómenos de la naturaleza usando el mismo tipo de razonamiento empleado para la mecánica de masas puntuales. Poco aportó esta obra a la comprensión del tema. En ella falta una teoría de campo para la descripción de la velocidad, igualmente está ausente el concepto de presión interna. Sin embargo, aparece una hipótesis sobre la respuesta o resistencia en términos de la velocidad. Esta es la fuente más temprana sobre la forma de la relación constitutiva en un fluido viscoso, que hasta el siglo XIX pudo definirse claramente en términos matemáticos.

Motivados por la obra de Newton, los Bernoulli, Johann y su hijo Daniel, estudiaron la mecánica de fluidos, obteniendo resultados importantes. También, Jean D'Alembert contribuyó en la creación del concepto de campo de velocidades. En la siguiente sección se habla con más detalle de las aportaciones de Euler y de sus contemporáneos.

### 3.2. La obra de Euler en mecánica de fluidos

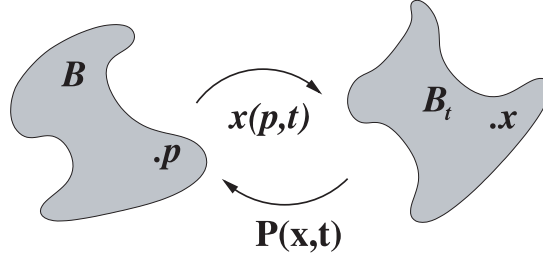
En 1726, a la edad de 19 años, cuando todavía era estudiante de Johann Bernoulli, Euler bosquejó un gran tratado de mecánica. Existe el manuscrito de 135 páginas que data de esa fecha y que incluye una versión temprana de su *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, que terminó en 1734 y se publicó en San Petersburgo dos años después, en dos volúmenes. Al final del primer capítulo incluyó la descripción de ese gran tratado que consta de seis partes. La primera, esencia de su *Mechanica*, fue la dinámica de masas puntuales en movimiento libre y con restricciones. Las demás, no incluidas en esta obra, se refieren al estudio de la dinámica de cuerpos no puntuales, comenzando por cuerpos rígidos y siguiendo con flexibles, elásticos, sujetos a impactos con otros cuerpos, y finalmente fluidos. Euler dedicó mucho tiempo de su vida a tratar de completar este inmenso programa. En este escrito nos referiremos sólo a sus contribuciones a la última parte de ésta lista. Gran parte de ellas, y sobre otras ramas de la matemática, en versiones originales así como estudios de su obra, se encuentran en el archivo de acceso libre en <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>. Por supuesto, también está la *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, editada por el comité Euler de la Academia de Ciencias Suiza, que desde 1911 ha venido publicando sus obras. A la fecha se tienen publicados 72 volúmenes en tres partes, y existe una cuarta en proceso y sin fecha de término.

El trabajo de Euler en mecánica de fluidos ha sido reseñado en forma extensa y meticulosa por Clifford A. Truesdell [1, 2] en sendos artículos publicados en dos volúmenes de la *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vea también Truesdell [3, 4, 5, 6], Neményi [7]. En ellos se describen sus aportaciones con respecto a sus antecesores y contemporáneos, y queda mostrado que Euler es sin duda el fundador de la mecánica de fluidos racional, entendida como una rama de la matemática. Sus trabajos en esta disciplina fueron muchos, escritos a lo largo de toda su vida. Existen, sin embargo, cuatro fundamentales que, por ser los primeros en sentar una base sólida de la teoría, los mencionamos con más detalle. El primero de ellos, escrito entre 1752 y 1755, se titula *Principia motus fluidorum*, y fue el último en publicarse, en 1761, en los *Commentaries* de la academia de ciencias de San Petersburgo. Aparece en este escrito la ecuación de continuidad o de la conservación de la masa en variables espaciales, para fluidos incompresibles. Deriva, entre otros resultados, las ecuaciones de movimiento, usando un concepto vago de presión interna. Encuentra, mucho antes que Pierre Simon de Laplace, la conocida “Ecuación de Laplace”, al estudiar flujos potenciales y su solución en términos de polinomios armónicos. También, muestra la “Ecuación de Bernoulli” para movimientos no estacionarios e irrotacionales. Y dicho sea de paso concluye que todos los movimientos poseen una velocidad potencial, esto es son irrotacionales o en otras palabras su vorticidad es cero. Este resultado equivocado fue también concluido por D’Alembert en su *Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, enviado a la academia de ciencias Berlín en 1749. Los tres trabajos restantes, escritos en 1755 y publicados en 1757 en forma consecutiva en las memo-

rias de la academia de ciencias de Berlín completan 145 páginas, y sus títulos son *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides* en donde habla de hidrostática, *Principes généraux du mouvement des fluides*, y *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides* en donde habla de hidrodinámica. En estos trabajos se aprecia la madurez, profundidad y claridad de su teoría. Corrige errores como el mencionado anteriormente y el concepto de presión interna es usado como se entiende el día de hoy. Además, obtiene las ecuaciones para fluidos compresibles pero no viscosos, incluyendo una relación de estado entre la presión y la densidad. En vida, estos trabajos le merecieron a Euler el reconocimiento y elogios de Joseph Louis Lagrange. Posteriormente, Euler escribió más artículos sobre esta disciplina ya sea para extender o reforzar sus fundamentos. En 1766 escribió una monografía dividida en cuatro partes: hidrostática, hidrodinámica, hidráulica, y acústica. En este tratado se dan presentaciones más cuidadosas y detalladas que en sus artículos originales. Demostraciones y desarrollos más simples. En resumen, más claridad. Además, sólo incluyó temas que estaban suficientemente maduros, y suprimió aquellos que todavía provocaban controversia, como por ejemplo la modelación matemática de la fricción y resistencia en un fluido. En la última parte, Euler consideró a la acústica como una rama de la hidrodinámica. Faltaba, sin embargo, una teoría cinética de gases madura para poder resolver problemas como la de obtener la velocidad del sonido.

Es indudable la aplicabilidad práctica que las contribuciones de Euler en mecánica tienen en la actualidad. Sin embargo, en su época no siempre se pensó igual. En Eckert [8], se relata un ejemplo típico sobre el aparente abismo histórico entre teoría y práctica, y en donde a Euler se le acusó de su inhabilidad para combinarlas. En el caso relatado se evidencia que fueron la ignorancia e ineptitud de quienes tuvieron a su cargo llevar a la práctica las instrucciones de Euler los responsables. Adoptó la idea de Johann Bernoulli al presentar en forma clara y general la hidráulica, a través de una sucesión de problemas de ingeniería. Ejemplo de ello es su trabajo sobre la ciencia de los barcos o de como construir y operar barcos, *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*. Obra publicada en dos volúmenes en 1749 por la academia de ciencias de San Petersburgo. Vea por ejemplo el artículo de Nowacki [9, 10], para un estudio de este aspecto de su obra. También merece la pena destacar su proyecto y diseño de una turbina, que fue construida hasta 1944 por Jacobo Ackert, quien encontró una eficiencia del 71 %. Un resultado sorprendente considerando que hoy en día usando los medios más modernos se alcanza, para una turbina de dimensiones semejantes, una eficiencia de poco mas del 80 %. En Fellmann [11], se pueden ver los dibujos de Euler y la turbina construida.

Los méritos de Euler en la mecánica son consecuencia del entendimiento, corrección y continuación de las obras de otros grandes matemáticos como Newton, los Bernoulli y D'Alembert. En sus trabajos no usó vectores sino componentes en coordenadas cartesianas. No obstante, en las secciones siguientes se presentarán, en notación vectorial y en forma resumida, algunos de sus aportes a la mecánica de fluidos intentando emular, en un lenguaje moderno, el rigor matemático que caracteriza a su

Figura 3.1: Regiones  $B$  y  $B_t$ 

obra. Para profundizar más vea, por ejemplo, los libros de Duvaut [12], Gurtin [13], Lamb [14], Serrin [15], Truesdell y Rajagopal [16].

### 3.2.1. Descripciones material y espacial

En la literatura moderna se distinguen dos formas de describir matemáticamente el movimiento de un cuerpo deformable, en particular de un fluido: la Euleriana o espacial y la Lagrangiana o material, Truesdell [5]. Esta última se le atribuyó equivocadamente a Lagrange cuando fue Euler el primero en concebirla. En efecto, en el año de 1860 en una memoria póstuma de Gustav Dirichlet, se dice que en la *Méchanique Analytique* de Lagrange, publicada en 1788, se había introducido esta descripción. El error fue corregido por Hermann Hankel un año después, en 1861, quien indicó que su profesor Bernhard Riemann le había señalado que el “método Lagrangiano” había sido introducido por Euler en 1770. Este año de diferencia fue suficiente para que el error se propagara. Aunque la observación de Riemann fue correcta los años no lo fueron. En realidad la fecha de la atribución a Lagrange debe ser en 1762, y no apareció primeramente en su *Méchanique Analytique*. La atribución a Euler debe ser en 1759. En 1738, Daniel Bernoulli en su *Hydrodynamica* intentó una descripción de la velocidad espacial. D’Alembert, en 1749, la introdujo para dos casos especiales. Sin embargo fue Euler quien en 1752 la generalizó. Entonces, se deben a Euler estas dos formas de ver el movimiento de un cuerpo deformable en toda su generalidad, quien las usó de manera sistemática para plantear sus teorías y resolver problemas tanto en fluidos como en sólidos. A continuación las definimos.

Considere una región en el espacio tridimensional  $B \subset \mathbb{R}^3$  a la que llamaremos *cuerpo*. Un elemento  $\mathbf{p} \in B$  es un *punto*. Supongamos que este cuerpo se mueve con el tiempo, matemáticamente esto lo describimos con una función  $\chi : B \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{p}, t) \mapsto \chi(\mathbf{p}, t) \in \mathbb{R}^3$ , a la que llamaremos *movimiento*, ver figura 3.1. Note que el punto  $\mathbf{x} \equiv \chi(\mathbf{p}, t) \in B_t$  es la posición que ocupa  $\mathbf{p}$  en el tiempo  $t$  en el cuerpo deformado por el movimiento  $B_t = \chi(B, t)$ . En general  $\chi(\mathbf{p}, 0) \neq \mathbf{p}$ . Sin embargo, es muy común y así lo haremos en este escrito, que  $B$  se tome como la configuración

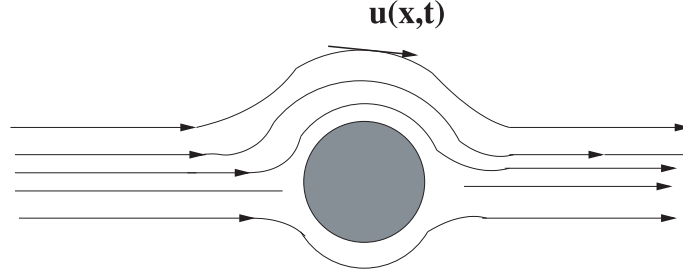


Figura 3.2: Líneas de corriente

inicial del fluido, esto es  $\mathcal{B}_0 = \chi(\mathcal{B}, 0) = \mathcal{B}$ . Los movimientos considerados son tales que si tenemos dos puntos  $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ , en  $\mathcal{B}$ , entonces las imágenes bajo la función  $\chi$  también son diferentes,  $\chi(\mathbf{p}, t) \neq \chi(\mathbf{q}, t)$ , para cada tiempo  $t$ . Esto es, la materia puede deformarse pero no colapsarse. Entonces  $\chi$  es biyectiva sobre  $\mathcal{B}_t$ . Esto nos permite definir la función inversa  $\mathcal{P} : \mathcal{B}_t \times \mathbb{R} \ni (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B}$ . Ver figura 3.1. Entonces,  $\mathcal{P}(\chi(\mathbf{p}, t), t) = \mathbf{p}$ , y  $\mathbf{x} = \chi(\mathcal{P}(\mathbf{x}, t), t)$ .

La *descripción material* de campos como la densidad de masa o la velocidad se refiere a escribir dichas funciones en términos de las variables  $(\mathbf{p}, t) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}$ , llamadas materiales o Lagrangianas o de referencia, porque el cuerpo  $\mathcal{B}$ , que usualmente es la condición inicial, sirve de referencia para describir al movimiento. En este caso a la descripción material también se le llama *descripción referencial*. Por ejemplo, la velocidad en la descripción material se define como es usual  $\dot{\chi}(\mathbf{p}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{p}, t)$ .

Si ahora queremos la velocidad en términos de las variables  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ , entonces definimos la velocidad como  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\chi}(\mathbf{p}, t)|_{\mathbf{p}=\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)}$ . Esta es la *descripción espacial* o Euleriana, y corresponde a escribir la velocidad con respecto a la configuración que tiene el fluido en el tiempo  $t$ . Con un ejemplo ilustraremos porque ésta forma de representar la velocidad es más usada en la mecánica de fluidos. Suponga que en el laboratorio se tiene un medidor de velocidades fijo en un canal por donde circula agua. Para el tiempo actual  $t$ , esta medición corresponde a la velocidad de la partícula de fluido que pasa por ese medidor ahora, que ocupó una posición  $\mathbf{p}$  en un tiempo inicial probablemente muy alejada del medidor y difícil de identificar en forma precisa en el laboratorio, pero que en este instante sabemos que ocupa exactamente el lugar  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p}, t)$ . Entonces, la velocidad medida es  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Ver figura 3.2. Llevar el seguimiento o trayectoria de una partícula  $\mathbf{p}$  de un fluido es más complicado. A pesar de que la descripción material goza de poca utilidad práctica en la mecánica de fluidos, existen relaciones cinemáticas más elegantes y breves en variables Lagrangianas. Por ejemplo, en la siguiente sección podemos ver las expresiones de la conservación de la masa en ambas descripciones y compararlas.

En la construcción de las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido

es necesario usar el cálculo vectorial. Un primer ejemplo se da al calcular derivadas respecto a variables materiales,  $(\mathbf{p}, t) \in \mathcal{B} \times \mathbb{R}$ , de campos escritos en términos de variables espaciales. En particular, se define la *derivada material temporal*, en ingeniería se conoce como derivada total, respecto al tiempo de un campo escalar como la densidad de masa  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , por

$$\frac{D}{Dt}\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\rho(\chi(\mathbf{p}, t), t)|_{\mathbf{p}=\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)}.$$

De la regla de la cadena y de la definición de velocidad, se sigue que

$$\frac{D}{Dt}\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla\rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Donde es claro que el gradiente de la densidad es respecto a la variable espacial  $\mathbf{x}$ . Análogamente, se define la derivada material temporal de un campo vectorial, como la velocidad, por

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\chi(\mathbf{p}, t), t)|_{\mathbf{p}=\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)}.$$

Usando nuevamente la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{D}{Dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]\mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

### 3.2.2. Conservación de la masa

Uno de los principios de la mecánica de cuerpos deformables establece que la masa no se crea ni se destruye. Sea  $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$  cualquier parte del cuerpo. En símbolos matemáticos esto se escribe como

$$\frac{d}{dt}m(\mathcal{D}_t) \equiv \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = 0,$$

para cualquier tiempo  $t$ . En el tiempo inicial o configuración de referencia  $\rho_0(\mathbf{p}) \equiv \rho(\chi(\mathbf{p}, 0), 0)$ . Entonces,

$$m(\mathcal{D}_t) = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{D}} \rho_0(\mathbf{p}) dV_{\mathbf{p}}.$$

Nuevamente, usando el cálculo vectorial transformamos la primera integral a la configuración de referencia usando el jacobiano,  $J(\mathbf{p}, t) \equiv \det \nabla\chi(\mathbf{p}, t) > 0$ , obtenemos la relación

$$\int_{\mathcal{D}} \{\rho(\chi(\mathbf{p}, t), t)J(\mathbf{p}, t) - \rho_0(\mathbf{p})\} dV_{\mathbf{p}} = 0.$$

Como  $\mathcal{D}$  es arbitraria, necesariamente se debe cumplir, para todo tiempo  $t$  y punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ ,

$$\rho(\chi(\mathbf{p}, t), t)J(\mathbf{p}, t) = \rho_0(\mathbf{p}),$$

y, como  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p}, t)$ ,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = J^{-1}(\mathbf{p}, t) \rho_0(\mathbf{p}).$$

Esta es la *ecuación de la conservación de la masa en la descripción material*. Al derivarla respecto al tiempo, obtenemos la ecuación correspondiente en la descripción espacial. En efecto, primero tomamos la derivada respecto al tiempo y después pasamos a variables espaciales

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \rho(\chi(\mathbf{p}, t), t) J(\mathbf{p}, t) \} |_{\mathbf{p}=\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)} = 0.$$

Para calcular esta expresión, note primero que la derivada de la densidad es la derivada material, que ya presentamos al final de la sección anterior. El cálculo de la derivada del jacobiano fue hecha por Euler y presentamos el resultado

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{p}, t) = J(\mathbf{p}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) |_{\mathbf{x}=\chi(\mathbf{p}, t)},$$

en donde  $\nabla \cdot$  es la divergencia, con respecto a  $\mathbf{x}$ , de la velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Finalmente, al tomar en cuenta las dos derivadas y dividir por el jacobiano ya que es estrictamente positivo, se concluye que

$$\frac{D}{Dt} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

para cada  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ , o bien, usando la expresión para la derivada material de la densidad y juntando términos, obtenemos la *ecuación de continuidad* o *ecuación de la conservación de la masa en la descripción espacial*

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \{ \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \} = 0,$$

Euler fue el primero en demostrarla en forma tan clara que a lo largo del tiempo ha permanecido idéntica a la que se presenta aquí.

En la mecánica de fluidos existen los términos compresible e *incompresible*. Esta es una propiedad del material de que está hecho el cuerpo, en términos modernos se llama *constitutividad*. En esta sección sólo abordamos aspectos cinemáticos y de masa. Por ahora introducimos un concepto necesario en la definición de incompresibilidad que daremos posteriormente.

Análogamente a la definición de masa se define al volumen de cualquier parte del cuerpo  $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ , en cualquier tiempo  $t$ , por

$$vol(\mathcal{D}_t) \equiv \int_{\mathcal{D}_t} dV_{\mathbf{x}}.$$



Un movimiento se dice que es *isovolumétrico* si preserva volúmenes, que en símbolos matemáticos significa que el volumen de cualquier parte  $\mathcal{D}$  no cambia bajo la acción del movimiento

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{D}_t) = 0.$$

Usando las ecuaciones de la conservación de la masa se demuestra que un movimiento es isovolumétrico si y sólo si cualquiera de las siguientes condiciones locales, esto es punto a punto, se satisface

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}, t) &= 1, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \frac{D}{Dt} \rho(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Cuando un movimiento se debe a la acción de fuerzas debe existir un balance o equilibrio entre ellas y el movimiento que provocan. A continuación se describe esto.

### 3.2.3. Balance de la cantidad de movimiento

Euler fue el primero en encontrar las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos sin viscosidad o como él los llamó, *fluidos perfectos*, terminología que subsiste en la actualidad. Sus antecesores y contemporáneos no pudieron lograrlo por la falta de dos elementos que permitieron dar un gran salto en la concepción de la mecánica. El primero es la representación matemática de la presión interna. En un fluido perfecto las fuerzas internas debido a la fricción interna o viscosidad son nulas. Fue Euler el primero en expresar la presión como un campo actuando sobre la pared del fluido en dirección del vector normal y mecánicamente equivalente a la acción del fluido exterior hacia la frontera de éste. Es este concepto de presión el que se usa hoy en día en hidrodinámica y fue un avance sustancial sobre la idea que sus predecesores manejaban al entender la presión como el peso de una columna de fluido o la altura a la que el agua se eleva en un tubo.

El segundo de los elementos que permitieron a Euler concretar las ecuaciones de movimiento para un fluido no viscoso es uno de los principios fundamentales de la mecánica de cuerpos deformables: el balance de la cantidad de movimiento lineal. Junto con el balance de la cantidad de movimiento angular, ambos constituyen las llamadas Leyes de Euler para el movimiento de un cuerpo deformable, y también rígido. Son leyes fundamentales e independientes que constituyen las relaciones entre el movimiento (cinemática) y las fuerzas (dinámica) que lo producen. En muchos textos se disminuye su importancia al obtener las ecuaciones de movimiento de cuerpos deformables, en particular fluidos, apelando a la segunda ley de Newton, como si fuera una simple aplicación. Como ya lo habíamos mencionado, Newton abordó problemas

en esa materia sin ningún éxito. Además, ningún científico, conociendo la obra de Newton, pudo obtener las ecuaciones de movimiento para fluidos antes de Euler. En la obra de Newton no hay lugar en donde aparezca ninguna versión de balance de la cantidad de movimiento para cuerpos, no masas puntuales. La gran contribución de Euler en este campo fue establecer con claridad dichas leyes. Le sirvieron para derivar no sólo ecuaciones de movimiento de fluidos sino también de sólidos elásticos y de cuerpos rígidos, a éstas últimas también se les conoce como ecuaciones de Euler. El estudio de problemas particulares lo llevaron a enunciar el balance de la cantidad de movimiento lineal en 1750 como lo conocemos actualmente. A continuación lo escribimos.

Sea  $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$  cualquier parte del cuerpo. Se define la *cantidad de movimiento lineal* por

$$\mathbf{l}(\mathcal{D}_t, t) \equiv \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}},$$

Usando la versión material de la ecuación de la conservación de la masa y el cálculo vectorial, es posible mostrar que

$$\dot{\mathbf{l}}(\mathcal{D}_t, t) \equiv \frac{D}{Dt} \mathbf{l}(\mathcal{D}_t, t) = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}},$$

Por otro lado, las fuerzas actuantes en cualquier parte  $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$  son de dos tipos. Aquellas que afectan directamente el interior de  $\mathcal{D}$  y otras que lo hacen a través de la frontera  $\partial\mathcal{D}$ . Fuerzas del primer tipo son como la gravedad o fuerzas magnéticas, se les llama *fuerzas de cuerpo* y se definen como campos vectoriales en terminos de variables espaciales, denotados por  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ , para cada  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{D}_t \times \mathbb{R}$ . El segundo tipo tiene que ver con el concepto de *fuerzas de superficie* actuantes sobre la frontera. Estas se definen como campos vectoriales en terminos de variables espaciales, y dependen de la superficie  $\partial\mathcal{D}_t$  sólo a través de su vector normal exterior  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ . Se denotan por  $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ , para cada  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\mathcal{D}_t \times \mathbb{R}$ . Este concepto logró precisarlo matemáticamente Augustin-Louis Cauchy, en 1822, como el *principio de esfuerzos*. Demostró la forma que tienen este tipo de fuerzas en términos de una transformación lineal, conocida como *tensor de esfuerzos*, actuando sobre el vector normal. No vamos a discutir en este escrito ésta gran aportación que dio otro salto cualitativo en la concepción de la mecánica de cuerpos deformables conocida hoy como Mecánica de Medios Continuos. En su lugar, discutiremos sobre la forma particular que tiene el vector de fuerzas de superficie en el caso de fluidos no viscosos, como los estudió Euler, y que resultó en el concepto matemático de presión interna. Esto constituye el principio de esfuerzos de Cauchy restringido a fluidos perfectos. Un *fluido perfecto* es aquel en el que, sobre la superficie interna, únicamente actúan fuerzas normales a ella. Es decir, toda fuerza que actúa sobre el fluido que ocupa la parte  $\mathcal{D}$  a través de  $\partial\mathcal{D}$ , tiene dirección ortogonal a la superficie del fluido y por lo tanto toda fuerza tangencial es nula. Entonces, existe un campo escalar,  $\pi(\mathbf{x}, t)$ , llamado presión tal que

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = -\pi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n},$$

para cada  $(\mathbf{x}, t) \in \partial\mathcal{D}_t \times \mathbb{R}$ . Con esta forma particular de la fuerza de superficie para fluidos perfectos, se calcula la fuerza total sobre la parte  $\mathcal{D}_t$  como la suma

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}_t, t) \equiv \int_{\partial\mathcal{D}_t} \mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) d\mathcal{S}_{\mathbf{x}} + \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Los axiomas básicos que relacionan al movimiento con la fuerza que lo produce son las leyes de Euler o de balance de la cantidad de movimiento lineal y angular. Euler sólo consideró el balance lineal para encontrar las ecuaciones de movimiento para fluidos perfectos. Es estrictamente necesario considerar los dos balances para encontrar la forma completa en casos en donde los fluidos sean viscosos, esto es, en donde  $\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$  no tenga la forma de arriba. Es claro que para medir velocidades y fuerzas tenemos que referirnos a un marco de referencia o bien un observador. La forma en que se enuncian las leyes de Euler dependen de este marco.

**I.** Existe un marco de referencia (observador), llamado *inercial*, tal que

$$\mathbf{f}(\mathcal{B}_t, t) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \dot{\mathbf{i}}(\mathcal{B}_t, t) = 0,$$

para cada cuerpo  $\mathcal{B}$ , y cada tiempo  $t$ .

**II.** Respecto a este marco de referencia inercial se satisface el *balance de la cantidad de movimiento lineal*

$$\mathbf{f}(\mathcal{D}_t, t) = \dot{\mathbf{i}}(\mathcal{D}_t, t),$$

para cada parte  $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ , y cada tiempo  $t$ .

La existencia de un marco inercial no es trivial. Si el observador no es inercial, en **II** aparecen en la derivada  $\dot{\mathbf{i}}(\mathcal{D}_t, t)$  aceleraciones adicionales. Las leyes de la naturaleza deben ser invariantes respecto al observador. A través de un movimiento de cuerpo rígido: una traslación y una rotación, se da un cambio de observador. Se demuestra que un cambio preserva **II** si y sólo si la rotación y la velocidad de la traslación son constantes en el tiempo. En este caso a este cambio se le llama *Galileano*. Teniendo un marco inercial, **II** se cumple para toda la clase de observadores que resultan de cambios Galileanos del marco inercial. La génesis del punto **I** tiene sus raíces en los trabajos de Euler en donde señala la existencia de marcos de referencia que producen relaciones sencillas entre la fuerza y el movimiento. La profundidad de este axioma da muestra de su madurez en el conocimiento y experiencia en manejar problemas concretos de la mecánica. Por ejemplo, en un estudio sobre máquinas hidráulicas, descubrió lo que hoy llamamos como “aceleración de Coriolis”, al manejar una aceleración relativa. Para una discusión más amplia sobre su contribución en este punto puede consultar el artículo de Maltese [17].

La forma que tiene **II** en términos de integrales, global, tiene una version puntual, local, que se encuentra usando el cálculo vectorial. Note primero que **II** se puede escribir de la siguiente manera

$$\int_{\partial\mathcal{D}_t} -\pi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} d\mathcal{S}_{\mathbf{x}} + \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV_{\mathbf{x}}.$$

Aplicando el teorema de la divergencia a  $-\pi(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}$ , para cualquier vector constante  $\mathbf{e}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}_t} -\pi(\mathbf{x}, t)\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S}_{\mathbf{x}} &= \int_{\mathcal{D}_t} -\nabla \cdot \{\pi(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}\} dV_{\mathbf{x}} = \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} -\nabla\pi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{e} dV_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

de donde, como  $\mathbf{e}$  es arbitrario, la ley de balance queda

$$\int_{\mathcal{D}_t} \{-\nabla\pi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\frac{D}{Dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} dV_{\mathbf{x}} = 0.$$

Como  $\mathcal{D}$  también es arbitrario, se obtiene la ecuación vectorial

$$\rho(\mathbf{x}, t)\frac{D}{Dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla\pi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t),$$

para cada  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ , o bien usando la expresión para la derivada material de la velocidad, se llega a la forma más usual del *balance local de la cantidad de movimiento lineal* para fluidos perfectos

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right\} + \nabla\pi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t).$$

### 3.2.4. Ecuaciones de Euler

Al sistema formado por las formas locales, en variables espaciales, de la conservación de la masa y el balance de la cantidad de movimiento lineal para fluidos perfectos se le conoce como las *ecuaciones de Euler*. Estas son

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right\} + \nabla\pi(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \{\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} &= 0. \end{aligned}$$

Note que en este sistema tenemos como incógnitas a la velocidad, la densidad y la presión. Esto es, son cinco variables desconocidas y cuatro ecuaciones. Es necesaria otra ecuación para que el problema pueda resolverse. En este punto, regresaremos a los dos tipos de fluidos perfectos mencionados en una sección anterior y que definimos enseguida. Dependiendo de cada caso, encontraremos la ecuación faltante.

Un fluido perfecto es *ideal* si

i. Es tal que los movimientos producidos por la fuerza  $\mathbf{f}$ , en el balance la la cantidad de movimiento lineal, preservan volúmenes (isovolumétricos) de aquí el calificativo de incompresible. Una caracterización de ésta condición ya vimos que es

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

ii. La densidad en la configuración de referencia es constante

$$\rho_0(\mathbf{p}) = \rho_0,$$

de donde, usando las caracterizaciones para movimientos isovolumétricos, se sigue que  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0$ .

En vista de ii, la conservación de masa es equivalente a i. Consecuentemente, el sistema de ecuaciones de Euler se simplifica, en el caso de un fluido ideal, a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\hat{\pi} \equiv \pi \rho_o^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{b} \rho_o^{-1}$ . Estas son las ecuaciones que Euler encontró en su artículo *Principia motus fluidorum*, escrito entre 1752 y 1755. Note que cualquier solución del sistema anterior admite una infinidad de presiones  $\hat{\pi}(\mathbf{x}, t)$ . En otras palabras, la presión se determina de manera única excepto por una presión constante en  $\mathbf{x}$ ,  $\pi_o(t)$ , ya que  $\nabla \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \nabla \{\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) + \pi_o(t)\}$ . Esta falta de unicidad en la determinación de la presión caracteriza a cualquier material incompresible.

Un fluido perfecto es *elástico* o *barotrópico* si existe una *relación constitutiva* entre la presión y la densidad

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \psi(\rho(\mathbf{x}, t)),$$

donde, la forma de la relación está determinada por el tipo de material que forma al fluido. Por ejemplo un gas. Los fluidos elásticos no tienen la propiedad de preservar volúmenes, por ello se les llama también *compresibles*.

Un *gas perfecto* es un fluido elástico en donde dicha función es estrictamente positiva. Entonces, es posible definir

$$\kappa^2(\rho) \equiv \frac{d}{d\rho} \psi(\rho), \quad \alpha(\rho) \equiv \frac{\kappa^2(\rho)}{\rho}.$$

Un caso particular es un *gas ideal* o *isentrópico*, donde  $\kappa^2(\rho) = \frac{\gamma\pi}{\rho}$ , con  $\gamma > 1$  constante. Entonces, integrando  $\frac{d}{d\rho} \psi(\rho) = \frac{\gamma\psi(\rho)}{\rho}$ , se obtiene  $\psi(\rho) = A\rho^\gamma$ , con  $A > 0$  constante. Para un gas perfecto entonces  $\rho^{-1} \nabla \pi = \alpha(\rho) \nabla \rho$ . Sustituyendo esto en la ecuación vectorial de las ecuaciones de Euler obtenemos el sistema correspondiente a un gas isentrópico

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha(\rho)(\mathbf{x}, t) \nabla \rho(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \{\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} &= 0. \end{aligned}$$

Al considerar una aproximación lineal del sistema de arriba, alrededor de  $\rho = \rho_0$ ,  $\mathbf{u} = 0$  y con fuerza de cuerpo  $\mathbf{b} = 0$ , se llega a las llamadas *ecuaciones de la acústica*, y simplificando términos se llega a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = \kappa^2(\rho_0) \Delta \rho.$$

Por ello a la función  $\kappa(\rho)$ , en el sistema no lineal, se le llama velocidad del sonido. Euler analizó ecuaciones de onda al considerar el movimiento de la cuerda vibrante, pero también al estudiar los principios de la acústica usando las ecuaciones de la hidrodinámica. En su artículo *De la propagation du son*, escrito en 1759 y publicado en 1766 en las memorias de la academia de ciencias de Berlín, aparece por primera vez una ecuación de onda unidimensional para estudiar la propagación del sonido. Newton ya había intentado, sin éxito, encontrar una fórmula para la velocidad del sonido. En sus trabajos encontramos la génesis de la teoría cinética de gases. Su madurez requirió de más conceptos que se crearon en un período posterior a Euler.

Por otro lado, el sistema no lineal de ecuaciones en derivadas parciales descrito arriba constituye un problema muy difícil de resolver. Euler, incluyendo otra relación constitutiva, lo publicó en su trabajo *Principes généraux du mouvement des fluides*, escrito en 1755. Escribió al final de su artículo lo alejado que se encontraba de llegar a tener un entendimiento completo del movimiento de estos fluidos y que lo escrito por él era sólo el comienzo. Resaltó que, toda la dinámica se encuentra en este sistema de ecuaciones y, para poder entenderla, debe avanzarse en el conocimiento del análisis matemático, más que en los fundamentos de la mecánica. Hoy en día se sigue haciendo investigación para lograr ese entendimiento, aún para fluidos ideales.

### 3.2.5. Ecuación de Bernoulli

Antes que Euler encontrara las ecuaciones de movimiento para fluidos ideales, los primeros intentos en la dirección correcta se deben a Daniel Bernoulli quien en su *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, enviada en 1733 a la academia de ciencias de San Petersburgo y publicada en 1738, logró relacionar la velocidad del flujo estacionario en un tubo, con la presión sobre las paredes de éste. Daniel Bernoulli habla en su trabajo sobre presión sobre las paredes del tubo y en el fluido pero tan vagamente que muestra la falta del concepto de presión interna, y falla en concretarla matemáticamente. Usa ideas de conservación de la energía, y de hecho eso es la “Ecuación de Bernoulli”. Sin embargo, la expresión a que llegó no es la correcta. Este trabajo motivó que su padre, Johann Bernoulli, escribiera, después de 1738, su *Hydraulica, nunc primum detecta ac demonstrata ex fundamentis pure mechanice*, publicada en 1743 pero fechada en 1732. Los problemas que examina son generalizaciones de los que aparecen en la *Hydrodynamica*. Esto no le resta méritos, tiene algo de lo que carece la obra de su hijo: método. En la obra de Johann Bernoulli aparece una separación entre cinemática y dinámica, y un concepto de fuerza

interior. Aunque la presentación es oscura, fue la fuente de inspiración de Euler para concretar los conceptos que le llevaron a concluir las ecuaciones de movimiento para fluidos ideales. En una serie de trabajos realizados entre 1750 y 1756, Euler obtuvo la “Ecuación de Bernoulli” en su forma actual, válida para flujos potenciales y estacionarios. Además, la generalizó para flujos potenciales no estacionarios y para flujos rotacionales estacionarios. También, en su tratado en tres partes escrito en 1755, consideró fluidos elásticos o barótropicos y derivó una ecuación de Bernoulli para flujos potenciales. Todos ellos y generalizaciones posteriores a Euler, reciben el nombre de teoremas de Bernoulli. Presentaremos sólo algunos. Dan una primera integral de la ecuación vectorial de las ecuaciones de Euler. Para ello, necesitaremos las siguientes definiciones.

Se habla de un *flujo estacionario*, en un fluido perfecto, si  $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , esto es la configuración del fluido no cambia con el tiempo, y  $\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $\partial_t \pi(\mathbf{x}, t) = 0$ . Entonces, si se tomaran dos fotografías al flujo en dos tiempos diferentes, estas serían idénticas.

Un *flujo irrotacional* es aquel en donde la *vorticidad*, el rotacional de la velocidad  $\omega(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , es nula. Esto es,  $\omega(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ .

Un *flujo potencial* es aquel en donde la velocidad es el gradiente de una función escalar,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t)$ . Note que un flujo potencial es irrotacional. Lo inverso se cumple si  $\mathcal{B}_t$  es simplemente conexo para algún  $t$ .

Finalmente, la fuerza de cuerpo  $\mathbf{b}$  es *conservativa* con potencial  $\beta$ , si  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = -\rho \nabla \beta(\mathbf{x}, t)$ . Note que, en un fluido perfecto, un flujo estacionario con fuerza de cuerpo conservativa es tal que  $\partial_t \beta(\mathbf{x}, t) = 0$ .

Entonces el *teorema de Bernoulli para un fluido perfecto* con fuerza de cuerpo conservativa es el siguiente. Considere cualquier  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ .

Si el flujo es potencial,

$$\nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}, t) + \beta(\mathbf{x}, t) \right) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \nabla \pi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Si el flujo es estacionario,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \left\{ \nabla \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \pi(\mathbf{x}) \right\} = 0.$$

Si el flujo es estacionario e irrotacional,

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \right) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x})} \nabla \pi(\mathbf{x}) = 0.$$

Donde  $\|\mathbf{u}\|^2 \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ . La demostración de las tres conclusiones anteriores es inmediata de la ecuación vectorial de las ecuaciones de Euler, con fuerza de cuerpo

conservativa,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \nabla \pi(\mathbf{x}, t) + \nabla \beta(\mathbf{x}, t) = 0,$$

y de la identidad

$$[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \nabla \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times (\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)).$$

Como corolario damos la forma de este resultado para fluidos ideales. Para ello definimos *líneas de corriente* como las curvas integrales de la velocidad para cada instante  $\tau$ . En otras palabras, congelamos el tiempo en  $t = \tau$  y consideramos un punto fijo  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}_\tau$ , entonces buscamos la curva  $\mathcal{C}_\tau$  que pasa por  $\mathbf{x}_0$ , en donde el campo vectorial  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$  es tangente a la curva en cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_\tau$ . Ver figura 3.2. Entonces, usando los conocimientos de ecuaciones diferenciales, al congelar el campo de velocidades en  $\tau$  ésta línea de corriente es solución de

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{q}(t), \tau), \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{x}_0,$$

donde la curva  $\mathcal{C}_\tau$  está dada paramétricamente por  $t \mapsto \mathbf{q}(t) \in \mathcal{C}_\tau$ . Si el flujo es estacionario, y se le toman dos fotografías en esos instantes, las líneas de corriente son idénticas. Este concepto fue introducido por Euler en su libro *Neue Grundsätze der Artillerie*, publicado en Londres en 1745, con el título *New principles of gunnery*, traducción hecha por Benjamín Robins.

Un campo cualquiera  $\psi$  es constante a lo largo de líneas de corriente si para todo  $t$ ,

$$\frac{d}{dt} \psi(\mathbf{q}(t)) = 0.$$

De la regla de la cadena, esto es equivalente a

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}(t), \tau) \cdot \nabla \psi(\mathbf{q}(t)) = 0, \text{ o bien}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) = 0, \text{ para cada } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_\tau.$$

El *teorema de Bernoulli para un fluido ideal* con fuerza de cuerpo conservativa es el siguiente. Considere cualquier  $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ . Entonces

Si el flujo es potencial,

$$\nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}, t) + \frac{\pi(\mathbf{x}, t)}{\rho_0} + \beta(\mathbf{x}, t) \right) = 0.$$

Si el flujo es estacionario,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \frac{\pi(\mathbf{x})}{\rho_0} + \beta(\mathbf{x}) \right) = 0,$$



esto es,  $\psi(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \frac{\pi(\mathbf{x})}{\rho_0} + \beta(\mathbf{x})$  es constante a lo largo de líneas de corriente.

Si el flujo es estacionario e irrotacional,

$$\psi(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \frac{\pi(\mathbf{x})}{\rho_0} + \beta(\mathbf{x}) = \text{constante}.$$

Si la fuerza de cuerpo es nula,  $\beta$  es constante, entonces se obtiene la “Ecuación de Bernoulli”

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \frac{\pi(\mathbf{x})}{\rho_0} = \text{constante}.$$

Existen otros casos particulares de fluidos para los que es posible calcular la primera integral de la ecuación vectorial de las ecuaciones de Euler, en particular se puede obtener para los gases definidos en la sección anterior.

### 3.2.6. Paradoja de Euler-D’Alembert.

En 1748, la academia de ciencias Berlín convocó a un concurso, con el tema: “la resistencia de los fluidos”. No existía en ese entonces una teoría satisfactoria sobre el tema. Lo hecho por Newton en este problema era incorrecto. El conocimiento sobre el asunto se reducía a un conjunto de resultados empíricos. Un año después, D’Alembert envió el trabajo *Essai d’une nouvelle théorie de la résistance des fluides*. Entre otros resultados, calcula la resistencia que un fluido en reposo ofrece al paso de un cuerpo rígido con velocidad uniforme. Donde el fluido, en la configuración de referencia  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ , ocupa la región exterior (no acotada) del cuerpo rígido. En la literatura es común plantear un problema equivalente, con objeto de hacer más fácil el cálculo de la fuerza. Este consiste en calcular la fuerza ejercida sobre un cuerpo rígido fijo, provocada por el paso de una corriente con velocidad uniforme al infinito. La conclusión de D’Alembert fue que el fluido no ofrecía resistencia alguna, esto es que la fuerza es igual a cero. Para este problema consideró un fluido ideal con  $\mathbf{b} \equiv 0$ , y como en el mismo trabajo afirmó que “todos los movimientos son irrotacionales”, éste también compartió dicha característica. Para mostrar su dicho supuso cierta simetría tanto del cuerpo rígido como de la distribución de la presión. Por otro lado, desde 1745 en su *New principles of gunnery*, Euler ya había mostrado este resultado para cualquier cuerpo rígido acotado, sin recurrir a argumentos de simetría. Esto es lo que se conoce como “paradoja de D’Alembert”. Claramente este hecho contradice nuestra percepción y experiencia sobre el comportamiento de la naturaleza. Euler, como director de la división de matemáticas de la academia de Berlín, tuvo que haber leído el trabajo de D’Alembert. El concurso se declaró desierto. D’Alembert, molesto, publicó su trabajo posteriormente en París, en 1752, cuestionando la utilidad práctica de los fluidos ideales. Si bien la explicación de la paradoja está en que el tipo de flujo y fluido considerados están demasiado alejados de la realidad, el tiempo ha mostrado que la hidrodinámica de fluidos ideales está lejos de ser inútil. En el problema de resistencia D’Alembert se equivocó. Afirmó que había mostrado que todos los

movimientos son irrotacionales. Pocos años después, Euler demostró lo contrario en su trabajo *Principes généraux du mouvement des fluides*, escrito en 1755.

En efecto, ahora se sabe que aún en fluidos ideales la paradoja de D'Alembert es falsa si el movimiento tiene vorticidad no cero. Lo mismo se concluye si la velocidad al infinito no es uniforme. Todavía más, si  $\mathbf{b} \neq 0$ , el principio de Arquímedes muestra que la fuerza sobre el cuerpo no es cero. Si agregamos efectos de fuerzas internas como la viscosidad, concepto que se logró concebir matemáticamente hasta el siglo XIX, la paradoja de D'Alembert también es falsa. Por otro lado, si sólo reemplazamos el fluido ideal por uno barotrópico, la paradoja permanece cierta si la velocidad máxima es estrictamente menor que la del sonido: flujo subsónico. Este último resultado obtenido entre 1954 y 1957, se debe a Robert Finn, David Gilbarg y Lipman Bers. Cuando el flujo es supersónico, aparecen ondas de choque y la fuerza es distinta de cero en la dirección de la velocidad.

Si consideramos el mismo problema en el plano, esto es con  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ , sólo una parte de la paradoja sigue siendo cierta. En efecto, en el caso de un fluido ideal con  $\mathbf{b} = 0$ , estacionario y potencial, y con velocidad uniforme al infinito:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{U}$  (horizontal y constante) cuando  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , se cumple la “Ecuación de Bernoulli” y la conservación de la masa se reduce a la “ecuación de Laplace”, obtenida por Euler en su *Principia motus fluidorum* en 1752-1755, para flujos potenciales. En efecto, para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ .

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}) + \frac{\pi(\mathbf{x})}{\rho_0} = \text{constante},$$

con  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})$ , y

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = 0.$$

De las propiedades de la función movimiento es posible demostrar que, en general, los puntos en el interior (en la frontera) del cuerpo en el tiempo inicial permanecen en el interior (en la frontera) para cualquier otro tiempo. Note que en un movimiento estacionario, la frontera es independiente del tiempo y sobre ella el movimiento describe una curva, que resulta en la tangencia del campo de velocidades sobre la frontera. En otras palabras, un fluido ideal resbala sobre la frontera del cuerpo rígido. La velocidad tangencial no es cero, pero la normal sí. Entonces,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  en  $\partial \mathcal{B}$ . Un fluido con viscosidad se pega a la frontera, y la condición es  $\mathbf{u} = 0$  en  $\partial \mathcal{B}$ . Regresando al caso de arriba, estacionario y potencial, la velocidad normal cero en la frontera se traduce en la condición de frontera tipo Neumann (en la derivada normal) para el potencial de la velocidad

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}.$$

Una forma de estudiar la “ecuación de Laplace” en una región del plano, consiste en introducir un campo de velocidades complejo y usar la teoría de variable compleja en relación a funciones armónicas. En particular, se puede mostrar que la *fuerza de arrastre o de dragado*, en la dirección de  $\mathbf{U}$ , sobre el cuerpo rígido es igual a cero.

Esta es la paradoja en el plano. Pero por otro lado, la *fuerza de levantamiento o sustentación*, perpendicular a la dirección de  $\mathbf{U}$ , es igual a

$$\mathcal{F}(\mathbf{c}) = -\rho_0 U \Gamma(\mathbf{c}),$$

donde  $U \equiv \|\mathbf{U}\|$ , el cuerpo rígido en  $\mathbb{R}^2$  es una región acotada cuya frontera es la curva  $\mathbf{c}$ , y

$$\Gamma(\mathbf{c}) \equiv \int_{\mathbf{c}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \, ds_{\mathbf{x}},$$

es la *circulación* sobre  $\mathbf{c}$ , orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj. Esta fórmula fue obtenida en forma independiente por Kutta, en Alemania en 1910, y por Joukowski, en Rusia en 1906. La circulación es cero en casos muy particulares de simetría en el flujo. Ver figura 3.2. Este resultado para fluidos ideales dió lugar a la teoría moderna de aeroplanos. En este caso la circulación diferente de cero se debe a la incidencia del aire, dirigido por veletas, sobre el perfil del ala. Esto crea la fuerza de sustentación sobre el ala de un avión.

### 3.3. Un problema del milenio en hidrodinámica

No vamos a intentar describir el desarrollo de esta disciplina después de Euler, simplemente señalaremos algunos puntos importantes. Fue hasta un siglo después que se incluyó matemáticamente la viscosidad en las ecuaciones de Euler. Esta relación se conoce actualmente como la de un *fluido de Navier-Stokes*, y es una relación constitutiva afín entre el tensor de esfuerzos y el gradiente de la velocidad. Además, para que la respuesta del fluido, en términos de fuerzas, sea independiente del observador es necesario y suficiente que el vector de fuerzas de superficie, en el balance de la cantidad de movimiento lineal, sea de la forma

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t) = \{-\pi(\mathbf{x}, t) + \lambda(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} \mathbf{n} + 2\mu(\mathbf{x}, t) [\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{n},$$

para cada  $(\mathbf{x}, t) \in \partial \mathcal{D}_t \times \mathbb{R}$ . Donde,  $\mathbf{D}$  es la parte simétrica del gradiente de la velocidad, y  $\lambda, \mu$  son las *viscosidades*. Estas dependen, como la presión, de la densidad, a través de relaciones constitutivas. Si  $\lambda \equiv 0 \equiv \mu$ , recobramos la forma del vector de fuerzas de superficie que implicó las ecuaciones de Euler para un fluido barotrópico. Por otro lado, si el fluido de Navier-Stokes es incompresible con densidad constante, esto es un fluido ideal con viscosidad, se llega a un *fluido Newtoniano* regido por las *ecuaciones de Navier-Stokes*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \nabla \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\hat{\pi} \equiv \pi \rho_o^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{b} \rho_o^{-1}$ , y  $\nu \equiv \mu \rho_o^{-1}$  se conoce como viscosidad cinemática. La diferencia con las ecuaciones de un fluido ideal es el término multiplicado por la

viscosidad  $\nu$  que representa el efecto de la fricción interna. Además, note que el orden de las ecuaciones de Navier-Stokes se incrementó, respecto a las de un fluido ideal, de uno a dos. Matemáticamente, el sistema pasa de ser hiperbólico a parabólico. Sin embargo, en flujos con velocidades grandes y/o en fluidos poco viscosos, el comportamiento tiende a ser hiperbólico. Vea, por ejemplo, los libros de Ladyzhenskaya [18], Lions [19], Temam [20], Málek y Rajagopal [21].

Sin entrar en detalles sobre las atribuciones históricas, vea Truesdel [3, 4, 6], Neményi [7], Darrigol [22], se reconoce al ingeniero francés Claude-Louis Navier, como el primero en encontrar las ecuaciones de Navier-Stokes, en su *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, publicado en las memorias de la academia de ciencias del instituto de Francia, en 1822. Siméon-Denis Poisson, posteriormente, obtuvo las ecuaciones correspondientes a un fluido barotrópico con viscosidades, en 1829, en su *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*. Tanto Navier como Poisson utilizaron argumentos moleculares, algo confusos, para la deducción de las ecuaciones. Finalmente, George Gabriel Stokes en su *On theories of the internal friction of fluids in motion, and the equilibrium and motion of elastic solids*, en 1845, derivó las ecuaciones para fluidos viscosos compresibles e incompresibles, usando argumentos más claros y limpios que sus predecesores desde el punto de vista de un continuo, siguiendo la escuela dejada por Euler.

A la fecha sigue siendo un reto resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Para celebrar a la Matemática en el nuevo milenio, el instituto Clay de Matemáticas de Cambridge, Massachusetts (CMI), estableció premios para siete *Problemas del Milenio*. El comité científico asesor del CMI seleccionó estos problemas enfocándose en cuestiones relevantes en la Matemática que se han vuelto clásicas debido a que se han resistido a su resolución durante los últimos años. El CMI acordó dar un millón de dólares americanos por la solución de cada problema. Durante el Encuentro del Milenio, realizado en Mayo del año 2000 en el Colegio de Francia en París, Timothy Gowers presentó una conferencia titulada La Importancia de las Matemáticas, para el público en general, mientras que John Tate y Michael Atiyah hablaron sobre los problemas. El CMI invitó a especialistas a formular cada problema. Hace más de cien años, el 8 de agosto del año de 1900, David Hilbert habló, en su famosa conferencia en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en París, sobre lo que consideró como los problemas abiertos en matemáticas más importantes en su época. En conmemoración a este suceso se tomó la decisión de anunciar los problemas del milenio como tema central en esta reunión. Uno de ellos, el sexto, es precisamente sobre la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes, vea [23]. Olga Ladyzhenskaya, una de las expertas en el tema, en uno de sus artículos, [24], escrito al final de su vida plantea este problema en forma precisa de la siguiente manera:

*¿Las Ecuaciones de Navier-Stokes, con condiciones de frontera e iniciales, dan una descripción determinista de la dinámica de un fluido incompresible?*

En otras palabras la pregunta es si para una colección de datos iniciales y en la frontera existe una y sólo una solución que describa el movimiento del fluido para todo tiempo futuro. Por supuesto la respuesta debe ser suficientemente completa. Por ejemplo, es importante conocer como depende la solución de los datos, que le ocurre cuando el tiempo es arbitrariamente grande. Para ello, los matemáticos han trabajado durante muchos años. El primer artículo en ésta dirección, existencia de soluciones débiles (concepto matemático que tiene que ver con la forma de entender la solución), se debe al matemático francés Jean Leray en los años 30 del siglo pasado, vea [25, 26, 27]. Actualmente no se sabe, en el espacio tridimensional en que vivimos, cual es el marco funcional adecuado para plantear el problema o en otras palabras como debemos entender el concepto solución para poder tener una descripción determinista de la dinámica de un fluido incompresible gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Una de las problemáticas es la existencia del término no lineal en dichas ecuaciones. Este también aparece en las ecuaciones de Euler, y él mismo hizo la observación de la insuficiencia del desarrollo del análisis matemático al tratar de resolverlas. Debemos señalar, finalmente, que así como las ecuaciones de Navier-Stokes, las de Euler permanecen con problemas abiertos similares. Vea, para más detalles, los artículos de Ladyzhenskaya [24], Constantin [28, 29], Christodoulou [30], Lions [31].



# Bibliografía

- [1] TRUESDELL C. A., *Rational fluid mechanics, 1687-1765*, Introducción del editor de Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series II, vol. 12, I-CXXV, Lausana, Suiza, 1954.
- [2] TRUESDELL C. A., *The first three sections of Euler's treatise on fluid mechanics (1766). The theory of aerial sound, 1687-1788. Rational fluid mechanics, 1765-1788.*, Introducción del editor de Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series II, vol. 13, I-CXVIII, Lausana, Suiza, 1955.
- [3] TRUESDELL C. A., *Essays in the history of mechanics*, Springer-Verlag, 1968.
- [4] TRUESDELL C. A., *An idiot's fugitive essays on science. Methods, criticism, training, circumstances*, Springer-Verlag, 1984.
- [5] TRUESDELL C. A., *The Kinematics of the vorticity*, Indiana University Press, 1954.
- [6] TRUESDELL C. A., Notes on the History of the General Equations of Hydrodynamics, *American Mathematical Monthly*, **60**, 445-458, 1953.
- [7] NEMÉNYI, P.F., The main concepts and ideas of fluid dynamics and their historical development, *Archive for History of Exact Sciences*, **2**, 52-86, 1962.
- [8] ECKERT, M., Euler and the fountains of Sanssouci, *Archive for History of Exact Sciences*, **56**, 451-468, 2002.
- [9] NOWACKI, H., Leonhard Euler and the theory of ships, *Preprint*, pp. 1-30 , 2007.
- [10] NOWACKI, H., Developments in fluid mechanics theory and ship design before Trafalgar, *Preprint 308, Max Planck Institute for the History of Science*, pp. 1-56, 2007.
- [11] FELLMANN, E. A., *Leonard Euler*, Birkhäuser, 2007.
- [12] DUVAUT, G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.

- 
- [13] GURTIN, M. E., *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, 1981.
- [14] LAMB, H., *Hydrodynamics*, Cambridge University, 6a edición, 1932, Dover, 1945.
- [15] SERRIN, J., *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, Handbuch der Physik, VIII/1, editado por S. Flügge y C. A. Truesdell, 125-263, Springer-Verlag, 1959.
- [16] TRUESDELL, C. A. Y K. R. RAJAGOPAL, *An introduction to the mechanics of fluids*, Birkhäuser, 2000.
- [17] MALTESE, G., On the relativity of motion in Leonhard Euler's science, *Archive for History of Exact Sciences*, **54**, 319-348, 2000.
- [18] LADYZHENSKAYA, O. A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, 2a edición, Gordon and Beach, 1969.
- [19] LIONS, P. L., *Mathematical topics in fluids mechanics.*, Clarendon Press, Oxford, Vol. 1: *Incompressible models*, 1996, Vol. 2: *Compressible models*, 1998.
- [20] TEMAM, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, North-Holland, 1977, A.M.S. Chelsea Publishing, 2001.
- [21] MÁLEK, J. Y K. R. RAJAGOPAL, *Mathematical issues concerning the Navier-Stokes equations and some of its generalizations*, Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations, Vol. 2, editado por C. M. Dafermos y E. Feireisl, 371-459, North-Holland, 2005.
- [22] DARRIGOL, O., Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier-Stokes equation, *Archive for History of Exact Sciences*, **56**, 95-150, 2002.
- [23] FEFFERMAN, C. L., Existence and smoothness of the Navier-Stokes, [http://claymath.org/millennium/Navier-Stokes\\_Equations/](http://claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/), Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, pp. 1-5, 2000.
- [24] LADYZHENSKAYA, O. A., Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness, *Russian Mathematical Surveys*, **58**, 251-286, 2003.
- [25] LERAY, J., Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.*, **12**, 1-82, 1933.
- [26] LERAY, J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. Pures Appl.*, **13**, 331-418, 1934.



- 
- [27] LERAY, J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, **63**, 193-248, 1934.
  - [28] CONSTANTIN, P., On the Euler equations of incompressible fluids, *Bull. A.M.S.*, **44**, 603-621, 2007.
  - [29] CONSTANTIN, P., Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics, *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond*, 353-360, Springer-Verlag, 2001.
  - [30] CHRISTODOULOU, D., The Euler equations of compressible fluid flow, *Bull. A.M.S.*, **44**, 581-602, 2007.
  - [31] LIONS, P. L., On some challenging problems in nonlinear partial differential equations, *Mathematics: frontiers and perspectives 2000*, Editado por V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, y B. Mazur, 121-135, A.M.S., 2000.



## Capítulo 4

# Euler y la cuerda vibrante

Gulmaro Corona Corona<sup>1</sup> y Salvador Arellano Balderas<sup>2</sup>

### Resumen

Las dos primeras secciones de este capítulo se dedican a la historia de la cuerda vibrante enfocándose en la famosa controversia entre Euler y D'Alembert sobre las soluciones de la ecuación de onda. Las secciones restantes tratan sobre la linealidad y no linealidad en la cuerda vibrante, esto conduce a la teoría de dispersión la cual se originó en el método cuántico utilizado en la obtención de la ecuación de Schrödinger. Esto que nos muestra que las ideas y resultados encontrados por Euler siguen iluminando nuestro camino.

### 4.1. Introducción

Euler fue el matemático más importante del siglo XVIII, además fue un investigador muy prolífico, para ello basta ver el número de volúmenes de su obra póstuma: serie I, 29 volúmenes; serie II, 31 volúmenes; serie III, 10 volúmenes. Como un ejemplo de su ímpetu creativo analizamos brevemente su contribución al problema de la ecuación de la cuerda vibrante. Escogimos este problema por varias razones: la primera porque dicho problema refleja perfectamente la interrelación que siempre ha existido entre la matemática y la física. La física ha sido fuente de problemas que han

---

<sup>1</sup>Área de Análisis Matemático, Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, [cgc@correo.uam.mx](mailto:cgc@correo.uam.mx)

<sup>2</sup>Área de Análisis Matemático, Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, [sab@correo.uam.mx](mailto:sab@correo.uam.mx)

hecho desarrollar conceptos y campos de la matemática. Segundo, porque la ecuación de la cuerda vibrante es la primera ecuación diferencial parcial que se descubre en la mecánica. Además, este ejemplo ilustra la capacidad de los matemáticos del siglo XVIII, como bien señala Truesdell [13], *... previo a 1730, los investigadores sobre mecánica del continuo aplicaban técnicas que se habían desarrollado en otros campos, notablemente en geometría y en técnicas de masas puntuales. Empezando con la investigación de sistemas vibrantes por Daniel Bernoulli y Euler, la situación fue completamente invertida. De entonces hasta el fin del siglo, la mecánica del continuo aparece en todos los problemas importantes del análisis.*

Este capítulo consta de tres secciones adicionales. Sección 2: Historia; sección 3: La cuerda vibrante; y sección 4: La ecuación de Schrödinger.

## 4.2. Historia

### 4.2.1. Sobre el siglo XVIII

Los siglos XVII y XVIII fueron prolíficos en resultados matemáticos de diferente naturaleza [7]. Los matemáticos del siglo XVIII, hacen avanzar el poder del cálculo sin introducir esencialmente conceptos originales pero ejercitando virtuosismo en la técnica.

El énfasis de Newton en la derivada y la antiderivada fue mantenido, así que el concepto de la integral como suma fue raramente empleado. Por otra parte, el concepto de Leibniz de la diferencial y la notación  $dx$ , llegó a ser el estándar, a pesar del hecho que a través del siglo las diferenciales de Leibniz no tienen un significado preciso. El siglo XVIII, también, continúa la tradición de Leibniz de manipulaciones formales de expresiones analíticas.

El trabajo matemático del siglo XVIII fue directamente inspirado en problemas de la física. Se puede decir que el interés del trabajo no fue la matemática, sino la solución de problemas de la física, las matemáticas fueron un medio para los fines de la física, concentrándose en la mecánica de sistemas discretos y del medio continuo.

Hay que observar que en esa época no había una separación clara entre ciencia y lo que hoy llamamos ingeniería, los matemáticos se encargaban de problemas tecnológicos como un hecho rutinario. Euler, por ejemplo, trabajó en el diseño de barcos, balística, cartografía, y otros problemas prácticos. Cualquier cuestión del análisis, tal como la convergencia de las series e integrales, el intercambio del orden de la diferenciación con la integración, el uso de las diferenciales de orden superior, y aspectos de la existencia de las integrales y solución de las ecuaciones diferenciales, fueron del todo ignoradas.

El proceder de los matemáticos estaba justificado pues las reglas de operación eran claras. Una vez formulado el problema físico-matemáticamente, el virtuosismo entra en acción, y nuevas metodologías y conclusiones emergen.

El significado físico de las matemáticas guiaban la trayectoria a seguir y frecuentemente suplían argumentos parciales para cubrir las etapas no matemáticas. Finalmente, lo correcto de las conclusiones físicas daban certeza de que la matemática era correcta.

A inicios del siglo XVIII, los *Principia* de Newton era una obra ampliamente conocida, aunque sus axiomas no alcanzaban todavía la forma de leyes de movimiento como las conocemos actualmente. En particular, la segunda ley no era aún considerada como aplicable a toda partícula de un cuerpo para obtener así las ecuaciones diferenciales que describen su movimiento [4], sino que era usada como una condición de consistencia del movimiento de una masa puntual más que como una ley fundamental de la mecánica. Es entendible entonces que, el estudio de ciertos sistemas del cuerpo rígido, de cuerpos flexibles o elásticos, etc., fueron de especial interés y dieron luz sobre los principios fundamentales para una concepción general de la mecánica.

#### 4.2.2. Antecedentes del problema

El problema de la cuerda vibrante consiste en considerar una cuerda elástica con los extremos fijos y deformada inicialmente, posteriormente puesta a vibrar libremente. El problema radica en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cualquier tiempo posterior.

Los trabajos de Brook Taylor y Johann Bernoulli son los que contienen los más avanzados resultados en la dinámica de sistemas continuos al inicio del siglo XVIII antes de los trabajos de Euler, quién puso la mayoría de la mecánica en su forma moderna.

En el trabajo de Brook Taylor de 1713 se prueban dos lemas y se resuelven dos problemas [4], en el Lema 2 se prueba que en cada punto de la cuerda la aceleración es proporcional a la curvatura, para ello Taylor asume que la cuerda consiste de elementos rígidos infinitesimales y usa la segunda ley de Newton. Entre otros puntos que son analizados por Taylor y que para nuestros propósitos es necesario comentar, está el examinar a una cuerda, que al ser pulsada en el centro, toma la forma triangular. Al principio, según su explicación, la curvatura de la cuerda es cero en todos los puntos excepto en el centro, donde de acuerdo con el lema 2, es el único punto con aceleración. Cuando la cuerda es soltada, la curvatura, y por lo tanto la aceleración aparecen en los puntos cerca del centro, y al mismo tiempo la curvatura y la aceleración decrecen en el centro. Taylor intenta explicar el fenómeno del cruce simultáneo de la configuración de equilibrio a través de una manera de la distribución de la curvatura (y de la aceleración) que se propaga del centro de la cuerda tensada hacia los puntos extremos de la cuerda. Taylor asume que para que dicho cruce simultáneo de la cuerda se lleve a cabo en cada punto se debe a la influencia de una fuerza proporcional al desplazamiento del eje de equilibrio, lo que se le llama condición del péndulo [4]. Es importante anotar la importancia que tuvo el análisis que Taylor hace de la transición inicial de la cuerda en forma triangular a la forma asumida durante las oscilaciones.

Este problema juega un papel importante en los argumentos y posición de Euler a mediados del siglo en la controversia con D'Alembert sobre la cuerda vibrante. Taylor también obtiene la forma de la cuerda, él encuentra que es la función de la curva del seno.

Johann Bernoulli en un trabajo de 1728, estudia la cuerda, la cual supone se compone de masas puntuales de pesos iguales e igualmente espaciadas, él considera a lo más seis masas, y analiza la condición para que los pequeños pesos puedan retornar al mismo tiempo su eje, de lo cual se sigue que la velocidad de los pesos individuales y sus fuerzas y la aceleración son proporcionales a sus desplazamientos, la condición del péndulo. Bernoulli al estudiar las fuerzas que trabajan sobre cada una de los pequeños pesos a lo largo de la cuerda, y al considerar solo pequeñas vibraciones, obtiene la siguiente la ecuación en diferencias, [4]

$$Ta(2y_k - y_{k-1} - y_{k+1}) \approx F_k, \quad (1)$$

pero  $F_k \propto y_k$ , luego

$$\frac{2y_k - y_{k-1} - y_{k+1}}{y_k} = c. \quad (2)$$

Por otra parte, al resolver el problema sobre la forma de la cuerda, Bernoulli encuentra que la condición que debe satisfacer la cuerda es

$$q \frac{d^2 y}{dz^2} = y, \quad (3)$$

la cual es esencialmente el límite de la fórmula (1), después de resolver la ecuación diferencial (3), Bernoulli encuentra que la forma de la cuerda es la curva de la función seno. En este trabajo de Bernoulli hay preponderancia de los métodos analíticos por encima de los geométricos, lo contrario de Taylor.

A manera de conclusión, los principios de movimiento no eran aún aplicados con suficiente generalidad para resolver problemas, ellos tenían que ser suplementados con más hipótesis las cuales se consideran restrictivas hoy en día pero que en su tiempo fueron necesarias para sistemas mecánicos con muchos grados de libertad. Como aquella condición del péndulo, la aceleración era proporcional al desplazamiento del punto de equilibrio. Como anota Truesdell [6], *“para la ecuación de la cuerda vibrante, tanto Taylor como Bernoulli, obtienen la fuerza de una porción infinitesimal de la cuerda debido a su curvatura. Cuando se enfrentan con la tarea de construir la ecuación diferencial para el sistema en cuestión ellos consideran la fuerza igual al desplazamiento de la posición de equilibrio y, no como nosotros lo hacemos, igual al producto de la masa de la partícula multiplicada por la segunda derivada de su desplazamiento con respecto al tiempo.”*

### 4.2.3. Solución de D'Alembert

D'Alembert en su trabajo de 1747, estableció que el propósito de su trabajo consistía en demostrar que la forma de la cuerda vibrante tiene infinidad de soluciones diferentes a la *compagne de la cycloide*", la curva de la función seno. Designemos por  $y = \varphi(t, x)$  a la posición de la cuerda, como función de la variables  $x$ , al tiempo  $t$ . Sea  $dy = p dt + q dx$  y consideremos las diferenciales  $dp = \alpha dt + \nu dx$  y  $dq = \nu dt + \beta dx$ . D'Alembert encuentra que para el movimiento de la cuerda, para pequeñas oscilaciones, se cumple

$$\alpha = c^2 \beta$$

donde  $c^2$  es una constante. En nuestra notación moderna, D'Alembert había obtenido la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t), \quad (4)$$

a esta ecuación se le llama la ecuación de la cuerda vibrante, hoy conocida como la ecuación de onda en una dimensión.

D'Alembert procede a resolver la ecuación (4) para el caso de  $c = 1$ . La idea de su método es la siguiente [6, 12, 5]. Se tiene

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} dt.$$

Similarmente se tiene

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} dx + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dt.$$

De estas relaciones se obtiene

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d(t + x).$$

Análogamente se tiene

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d(t - x).$$

Luego  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  es una función de la variable  $t + x$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  es una función de  $t - x$ , digamos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Phi(t + x), \text{ y } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Psi(t - x).$$

Así, se tiene

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t} dt + \frac{\partial y}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \Phi(t + x) + \frac{1}{2} \Psi(t - x).$$

En esta fórmula cada sumando es una diferencial exacta. Después de una integración, resulta que la solución de la ecuación (4) es de la forma

$$y(t, x) = \phi(at + x) + \psi(at - x)$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son integrales indefinidas de  $\frac{1}{2}\Phi$  y  $\frac{1}{2}\Psi$ , respectivamente. Cuando las condiciones iniciales  $y(0; x) = f(x)$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$  para  $t = 0$ , y las condiciones en la frontera son los extremos fijos:  $y(t; 0) = y(t; l) = 0$ . D'Alembert encuentra que  $\phi$  es una función impar y periódica de período  $2l$ , y que además  $\phi = -\psi$ ,  $\phi(x) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Luego la solución a la ecuación de la cuerda vibrante (4) es

$$y(t; x) = \frac{1}{2}f(x + t) + \frac{1}{2}f(x - t). \quad (5)$$

Para D'Alembert la función de condición inicial  $f(x)$  debe ser una función analítica, cuya gráfica es una curva sin picos, luego para D'Alembert la cuerda con configuración inicial en forma de triángulo no es considerada por la fórmula (5).

#### 4.2.4. Solución de Euler

Euler hace su propio análisis del problema de la cuerda vibrante en su trabajo de 1748 [6]. Él procede en forma muy similar a como lo hizo D'Alembert y encuentra que la solución a la ecuación de la cuerda vibrante está dada por

$$y = \frac{1}{2}f(x + tc) + \frac{1}{2}f(x - tc) \quad (6)$$

donde  $f(x)$  es la función cuya gráfica da la forma de la cuerda al inicio del movimiento. Sin embargo, para Euler la configuración inicial de la cuerda puede ser cualquier curva que pueda ser trazada libremente con la mano. Por lo tanto, la configuración inicial de la cuerda de un triángulo queda incluida en su solución dada por (5).

En este trabajo Euler da a conocer la siguiente solución especial de la ecuación (4)

$$y(t, x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi ct}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi ct}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi ct}{a} + etc,$$

cuando la función de condición inicial es

$$y(0, x) = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + etc.$$

Luego la controversia entre Euler y D'Alembert consiste en determinar cuales son las funciones que son admisibles como soluciones de la ecuación diferencial parcial (4).

Para Euler la función de condición inicial puede ser cualquier curva que se pueda trazar libremente con la mano, mientras que para D'Alembert deben ser funciones analíticas. Observe que para Bernoulli la configuración inicial de la cuerda que es de



forma triangular, da origen a una solución de la ecuación de la cuerda vibrante, pero para D'Alembert no puede ser solución. Pero además hay otro problema entre ambos personajes. Como bien anota Luzin [2]:

*“A primera vista podría parecer que, aparte de puntos menores, la solución de Euler y de D'Alembert son idénticas. Pero este no es el caso. Ambos usan la misma terminología pero usan las mismas palabras para denotar diferentes cosas. Ellos coinciden en una cosa, digamos, que el término ecuación significa igualdad de dos expresiones analíticas. También, ambos coinciden en que si dos expresiones analíticas toman los mismos valores en los mismos puntos de un intervalo, ellas deben ser idénticas. Pero para D'Alembert y Euler difieren fundamentalmente en el significado de la palabra función para D'Alembert significa expresión analítica mientras que para Euler significa cualquier curva que pueda ser trazada por la mano.”*

Hacemos la observación que para aquella época función se entendía ante todo como una expresión analítica lo cual significa *“que es cualquier combinación de constantes y variables construida de operaciones matemáticas, algebraicas o trascendentales, incluyendo sumas infinitas, diferenciación e integración”*, ver [8].

#### 4.2.5. La controversia entre Euler y D'Alembert

La controversia entre Euler y D'Alembert tiene varios aspectos. Primeramente, existe el aspecto de la regularidad que debe tener la función de condición inicial para que la relación (5) sea solución de la ecuación (4). Entre los argumentos aportados por D'Alembert, veamos por ejemplo el siguiente, la ecuación (4) demanda que la razón  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  tenga un valor definido (finito), esto es, que la curva tenga una curvatura definida en cada punto, condición que había encontrado Taylor, luego, la presencia de puntos tales como picos, curvas artificialmente ligadas de diferente naturaleza, hace que la fuerza se indetermina ahí, y consecuentemente hace que el movimiento sea imposible. Euler no estaba convencido con los argumentos de D'Alembert y trataba de refutarlos con contrargumentos de los cuales podemos mencionar el siguiente. Euler [8] anotaba que el problema debido a los picos era debido a la primera derivada de  $\psi$ . Por lo tanto, uno tiene sólo que suavizar la derivada  $\psi'$ , lo cual puede ser hecho, cambiando a  $\psi$  por  $\bar{\psi}$  de manera que el resultado sea infinitamente pequeño. Puesto que  $\bar{\psi}(x - t)$  puede entonces satisfacer la ecuación de la cuerda vibrante, uno puede también admitir a  $\psi(x - t)$  como una solución ya que los pequeños cambios eran ignorados en el análisis de aquel entonces.

Para valorar la posición de Euler en esta controversia, de ir a contracorriente, hay que anotar lo que Truesdell dice de ese episodio [11] *... es el gran avance de la metodología científica en todo el siglo*, pues incluir como soluciones de la cuerda vibrante a las funciones suaves por tramos (parte de las curvas trazadas libremente por la mano), propuesto por Euler, es contradecir el postulado de Leibniz que en mecánica las funciones deben ser analíticas, un postulado el cual, de acuerdo a Truesdell, no había sido contradicho por nadie ni aún por Newton.

Esta controversia, que en un principio era sobre cuáles deberían ser las funciones solución de la ecuación (4), también obligó a revisar un concepto tan fundamental como lo es el concepto de función [2, 8, 6]. Al respecto, vemos en Euler su propia evolución de su concepto de función. Para 1748, en su libro *Introductio in analysin infinitorum* [8], él define una función como sigue: *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier manera de esta cantidad variable y números o cantidades constantes*. Para 1755, en su segundo libro sobre análisis *Institutiones calculi differentiales*, Euler define función como: *Si  $x$  denota una cantidad variable, todas las cantidades las cuales dependen en alguna manera de  $x$  o son determinadas por ésta, son llamadas funciones de esta variable*. Como se puede observar en esta última definición, Euler se acerca a la moderna definición de función.

A la luz de nuestro conocimiento presente, sabemos que tanto Euler como D'Alembert tenían en parte razón, para que la relación (5) sea solución de la ecuación (4) se requiere una *mínima suavidad* de la función, que sea dos veces derivable. Pero, con el concepto de soluciones débiles es posible considerar funciones con singularidades. Aquí, reconocemos la gran intuición que Euler tenía. Por otra parte, será hasta el siglo XIX que tendremos una aceptable definición de función [2, 8, 6].

#### 4.2.6. La solución de Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli en su trabajo de 1753, escribe sus ideas sobre la cuerda vibrante y emite su opinión sobre la controversia entre Euler y D'Alembert. Bernoulli conjeturó que todas las curvas iniciales posibles pueden ser representadas por series de funciones trigonométricas de senos

$$f(x) = \sum_1^n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (7)$$

y que los movimientos subsecuentes serán dados por la función

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}. \quad (8)$$

Bernoulli, agrega que hay suficientes constantes  $a_n$  para así, poder obtener  $f(x)$  por la serie de senos.

Euler en su trabajo de 1753, considera que las series trigonométricas (8) son soluciones especiales de la curva vibrante, pero piensa que no es verdad que cualquier función sea aproximada por la serie (7), y además, agregaba, que ni las series de Maclaurin pueden expresar cualquier curva, menos aún una serie de senos. Sin embargo, hace la observación de que si se toma la sucesión  $a_n$  como una progresión

geométrica se puede obtener la función inicial

$$f(x) = \frac{c \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{1 - k \cos \frac{\pi x}{a}}.$$

D'Alembert en su trabajo de 1757 también considera que la conjetura de Bernoulli es falsa pues no cree que toda función impar y periódica pueda ser representada por una serie de la forma (7), si bien las series de senos son dos veces diferenciables, no cree que toda función impar sea posible obtenerla de esa manera. Por otra parte D'Alembert sigue discrepando de Euler sobre las curvas suaves a trozos, pues ahonda en que la función  $f(x)$  debe ser dos veces diferenciable.

Bernoulli en 1758, reitera que se tienen infinitas constantes a su disposición, y al ser seleccionadas apropiadamente puede hacer que la serie (7) coincida con cualquier función  $f(x)$  en un infinito número de puntos. En cualquier caso Bernoulli insiste que (8) es la solución más general de la ecuación (4).

La discusión entre D'Alembert, Euler y Bernoulli continuó por una década sin llegar a un acuerdo. En esta etapa, a la controversia se le había agregado el problema de cuales son la clase de funciones que puedan ser representadas por series de senos o más generalmente por series de Fourier.

#### 4.2.7. El trabajo de Lagrange

En 1759, Lagrange entra a la controversia. El cree que puede probar que la conclusión de Euler es correcta, es decir, que cualquier curva puede servir como la curva inicial para la ecuación (4). Lagrange empieza por discretizar la cuerda por un número finito de masas iguales e igualmente espaciadas para después pasar al límite. Él obtuvo para la solución del sistema (8)

$$y(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \left[ Y_q \cos \frac{c\pi r t}{l} + \frac{1}{r\pi c} V_q \operatorname{sen} \frac{c\pi r t}{l} \right],$$

donde  $Y_q$  y  $V_q$  son el desplazamiento inicial y la velocidad inicial de la  $q$ -ésima masa. Luego reemplaza  $Y_q$  y  $V_q$  por  $Y(x)$  y  $V(x)$ , respectivamente. Lagrange consideró las cantidades

$$\sum_{q=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} Y(x) dx, \text{ y, } \sum_{q=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} V(x) dx,$$

como integrales y además conmutó la integral con la suma infinita  $\sum_{r=1}^{\infty}$ . El resultado obtenido es

$$y(x, t) = \left( \frac{2}{l} \int_0^l Y(x) \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \cos \frac{r\pi c t}{l} \\ + \left( \frac{2}{\pi c} \int_0^l V(x) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{l} \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} dx \right) \operatorname{sen} \frac{r\pi x}{l} \cos \frac{r\pi c t}{l}.$$

Aquí hay que anotar que al hacer el intercambio de la suma infinita con la integración, en esta última relación, Lagrange introduce series divergentes, pero dejando de lado este punto, Lagrange pierde la oportunidad de haber reconocido a las integrales

$$\int_0^l Y(x) \sin \frac{r\pi x}{l} dx,$$

como los coeficientes de la serie de Fourier. Después de algunos pasos más, Lagrange finalmente obtiene el resultado de D'Alembert

$$y(t, x) = \phi(ct + x) + \psi(ct - x).$$

Sin embargo, tanto Euler como D'Alembert externaron una serie de objeciones al trabajo de Lagrange, por lo cual para refutar las críticas, en una carta de 1760/61 da una solución diferente al problema de la cuerda vibrante. Esta vez Lagrange empieza con la ecuación (4). El obtiene

$$y(t, x) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} g dx - \frac{1}{2} \int_0^{x-t} g dx,$$

donde  $f(x) = y(0, x)$  y  $g(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(t, x)$  en  $t = 0$  son la condiciones iniciales. Anotamos, Lagrange en su primer trabajo se encuentra cerca de encontrar la manera de calcular los coeficientes de la serie de Fourier.

#### 4.2.8. Resumen

Siguiendo el ejemplo de Newton, los matemáticos del siglo XVIII se abocaron a transponer las fronteras de lo explicable en la naturaleza, teniendo para ello la herramienta del cálculo principalmente, pero ante todo mostrando gran ingenio e intuición. En esta perspectiva, el problema de la cuerda vibrante, es un árbol de un bosque frondoso por explorar: la mecánica de los cuerpos elásticos y deformables. Todo ello, con la convicción de establecer las leyes generales de la mecánica. Bajo esa perspectiva, Euler es el que hace grandes contribuciones. Para informarse de las leyes de la mecánica descubiertas por Euler ver el capítulo escrito por Jorge Esquivel y Marisela Guzmán en este libro.

D'Alembert es quién descubre la ecuación diferencial parcial para la cuerda vibrante, aún sin contar con el concepto de derivadas parciales. Pero la solución de dicha ecuación exigió de la matemática el esclarecimiento de temas fundamentales como el concepto de función, series de Fourier, y un teorema de existencia y regularidad de la solución de la ecuación de onda. La tarea que los matemáticos del siglo XIX lograron con relativo éxito fue el retorno al rigor, con una actitud diferente.

Para un seguimiento de la evolución del concepto de función recomendamos ver [2, 6, 10] sobre la evolución de las series de Fourier ver [5, 14], para la conformación, de lo que hoy llamamos, la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales [1], [7].

### 4.3. La cuerda vibrante

Presentamos una deducción recientemente hecha [2006] de la ecuación de onda al considerar una cuerda vibrante en el espacio. El lector se convencerá por si mismo, de que hay una estrecha relación con el trabajo de Euler y la actividad de los investigadores de hoy en día.

Consideremos una cuerda que se encuentra sostenida por sus extremos, los que permitiremos sean puntos del espacio tridimensional (y por consiguiente los puntos que conforman a toda la cuerda), separados por una distancia  $l$ . En esta posición se tensa la cuerda por sus extremos.

Introducimos coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  de tal manera que uno de los extremos se encuentra en el origen, es decir, tiene coordenadas  $(0, 0, 0)$  mientras que el otro está en el eje  $x$  con coordenadas  $(l, 0, 0)$ . Encontraremos la ecuación que rige al movimiento producido por los desplazamientos iniciales con velocidades iniciales y fuerzas externas en cada punto de la cuerda.

Asumamos que, la cuerda en todo momento  $t$  describe una curva que pueden ser parametrizada como

$$\vec{X}(s, t) = \begin{bmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{bmatrix},$$

donde  $s$  es la longitud de arco del origen a algún punto específico de la cuerda. Conforme se incrementa la longitud de arco  $s$  la forma de la cuerda se manifiesta. Esto puede compararse como el marcador de kilómetros usado en las carreteras.

De esta manera podemos seguir como se mueve cada porción de la cuerda en el tiempo, fijando  $s$  y cambiando  $t$ . Ya que tenemos alguna libertad en esta parametrización, por conveniencia,  $s$  representa la longitud de arco a lo largo de la curva de alguna referencia o configuración como por ejemplo los puntos dónde se alcanza el equilibrio. Así, una cuerda tensada, sostenida entre dos puntos, de longitud  $l$  estirandola de  $(0, 0, 0)$  a  $(l, 0, 0)$  podría ser descrita por

$$\vec{X}_{\text{reposo}} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \leq s \leq l.$$

Cuando el parámetro para una curva paramétrica mide la longitud de arco,  $\|\vec{X}_s\| = \|\partial \vec{X} / \partial s\| = 1$ .

Sin embargo, es necesario tener en mente que para configuraciones de la curva, las cuales corresponden a situaciones donde puede no haber equilibrio,  $s$  puede no corresponder a la longitud de arco cuando las porciones de la curva se estiren ( $\|\partial \vec{X} / \partial s\| > 1$ ) o se compriman ( $\|\partial \vec{X} / \partial s\| < 1$ ). Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la curva describen la respuesta a las elongaciones y compresiones debida a las fuerzas externas.

Consideremos la porción de la curva entre  $s$  y  $s + \Delta s$ . El radio y densidad de la cuerda pueden variar con  $s$ . Denotemos por  $\rho(s)$  la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud), la cual puede pensarse como el producto del área de la sección transversal y la densidad real (masa por unidad de volumen) del material. Si  $\Delta s$  es pequeño, la masa total del pequeño segmento es

$$\int_s^{s+\Delta s} \rho \cong \rho(s) \Delta s.$$

Ya que se pretende invocar la segunda ley Newton, se debe considerar todas las fuerzas que actúan sobre el segmento elegido de la cuerda. Antes que nada, existen fuerzas de contacto sobre el segmento debida a las porciones de las curvas a la derecha e izquierda de  $s$  (recuerde que  $\Delta s$  es pequeño), respectivamente. Sea  $\vec{T}(s, t)$  la fuerza que experimenta la porción de la curva a la izquierda de  $s$  debida a la porción de la curva a la derecha de  $s$ . En cualquier momento, imagine que la curva es cortada por  $s$ , la porción a la derecha de  $s$  necesitaría una fuerza  $-\vec{T}(s, t)$  para mantenerse en su posición.

Por otra parte, podrían haber fuerzas que actúen sobre el segmento elegido debidas a la gravedad, resistencia del aire, etc. La fuerza resultante de todas ellas podemos representarlas como  $\rho(s) \Delta s \vec{a}(s, t)$ . Por la segunda ley de Newton, tenemos el siguiente sistema

$$\rho(s) \Delta s \vec{X}_{tt}(s, t) = -\vec{T}(s, t) + \vec{T}(s + \Delta s, t) + \rho(s) \Delta s \vec{a}(s, t).$$

Dividiendo esta ecuación entre  $\Delta s$  conseguimos que

$$\rho(s) \vec{X}_{tt}(s, t) = \frac{-\vec{T}(s, t) + \vec{T}(s + \Delta s, t)}{\Delta s} + \rho(s) \vec{a}(s, t).$$

Fijando las variables  $s, t$ , y tomando el límite cuando la variable  $\Delta s$  tiende a cero, obtenemos el siguiente sistema,

$$\rho(s) \vec{X}_{tt}(s, t) = \vec{T}_s(s, t) + \rho(s) \vec{a}(s, t). \quad (9)$$

que en adelante, nos referiremos como el sistema maestro de onda. Este sistema, por sí sólo, no describe completamente el movimiento de la cuerda pues contiene dos variables incógnitas, a saber,  $\vec{X}$  y  $\vec{T}$ . Más información acerca del material que constituye la cuerda es requerida.

Una cantidad que distingue a una cuerda de una viga rígida es que no se resiste a ser flexionada o doblada. Consecuentemente, la fuerza de contacto  $\vec{T}$  para tales materiales siempre actúan en la dirección de la tangente en  $s$ :

$$\vec{T}(s, t) = T(s, t) \hat{t}(s, t),$$

donde  $\hat{t}(s, t) = \vec{X}_s(s, t) / \|\vec{X}_s(s, t)\|$  es el vector unitario tangente, de esta manera, la magnitud del vector  $\vec{T}(s, t)$  es  $T(s, t)$ , la cual es conocida como la *tensión*.

Además se requiere de una relación constitutiva que describa la respuesta de la cuerda a la compresión o expansión. Los materiales elásticos, es decir, materiales que retornan a su original forma después de que alguna fuerza aplicada se remueve, tienen la propiedad de que la tensión es función exclusivamente de la posición a lo largo de la curva  $s$  y  $\|\vec{X}_s\|$ .

La relación constitutiva más comúnmente usada para la deducción de la ecuación de onda corresponde a la suposición de que el material que está hecha la cuerda es perfectamente elástico en el cual la tensión es proporcional a  $\|\vec{X}_s\|$ :

$$T(s, t) = E\|\vec{X}_s\|, \quad (10)$$

donde la constante de proporcionalidad,  $E$  es conocida como el módulo de Young. Esta relación constitutiva es muy frecuentemente usada porque la ecuación que se obtiene, al sustituir dicha relación en el sistema maestro de onda, es una EDP lineal.

Una liga que se estira varias veces de su longitud natural, es decir, cuando no está bajo la acción de ninguna fuerza, satisface aproximadamente esta relación constitutiva. Sin embargo, note que tal relación implica que la longitud de la cuerda en ausencia de fuerzas debe ser cero.

Una propiedad que posiblemente se puede encontrar en los diferente materiales que constituyen a las cuerdas que usamos como la cuerda de una guitarra es la de la elasticidad lineal. En estos materiales, la fuerza por unidad de área es proporcional a la elasticidad, donde

$$\text{elasticidad} = \frac{\text{cambio de longitud}}{\text{longitud}} = \frac{\|\vec{X}_s\| - 1}{1}.$$

De esta manera, una relación constitutiva sería

$$T(s, t) = k(\|\vec{X}_s\| - 1) \quad (11)$$

donde  $k$  puede ser pensada como la constante de un resorte.

Consideremos por ejemplo el problema de la cuerda pulsada, el cual es el problema canónico de la ecuación que sirve como introducción a las EDPs. Este problema consiste en describir como es la forma después de haber pulsado la cuerda de la guitarra.

Supongamos que la cuerda de la guitarra tensa esta hecha de un material con la propiedad de uniformidad y que su longitud en el reposo es  $l$ . En esta configuración de reposo, la cuerda es parametrizada por

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \leq s \leq l.$$

Asumiremos que cuando la cuerda es pulsada, el efecto debido a la gravedad puede ser despreciado. Sustituyendo la ecuación (9) y  $\vec{a}(s) = \vec{0}$  en el sistema maestro de

onda (10) obtenemos que

$$\rho \vec{X}_{tt} = E X_{ss}.$$

Escribiendo explícitamente este sistema, conseguimos

$$\begin{aligned} x_{tt} &= c^2 x_{ss} \\ y_{tt} &= c^2 y_{ss} , \\ z_{tt} &= c^2 z_{ss} \end{aligned}$$

donde  $c^2 = E/\rho$ . Ya que estas ecuaciones son desacopladas, el movimiento en cada dimension es independiente. Si la cuerda es pulsada de manera que su inicial configuración se encuentra en el plano  $xz$ , entonces permanecerá siempre en él, pues la solución a la EDP en  $y$  es  $y(s, t) = 0$ .

Este problema reducido se resuelve teniendo en cuenta que los extremos deberán permanecer fijos durante todo el movimiento y por consecuencia su longitud de separación entre ellos, de manera que se deberán tener las condiciones a la frontera siguientes:  $x(t, 0) = z(t, 0) = z(t, l) = 0$  y  $x(l, t) = l$ . Por otra parte si la cuerda parte desde una configuración del reposo se deberán tener la condiciones de inicio  $x(s, 0) = s, z(s, 0) = 0$  y  $x_t(s, 0) = z_t(s, 0) = 0$ . Ya que  $x(s, t) = s$  soluciona la EDP junto con las condiciones de frontera e inicio, el sistema maestro de onda toma la forma conocida como la ecuación de onda

$$z_{tt} = c^2 z_{xx}.$$

Notemos que se tiene la identidad

$$(\mathbf{T}(s, t) \hat{\mathbf{t}})_s = T_s(s, t) \hat{\mathbf{t}} + \mathbf{T}(s, t) \vec{X}_{ss} = T_s(s, t)/(e + 1) \vec{X}_s + \mathbf{T}(s, t) \vec{X}_{ss}$$

donde  $e$  = elasticidad y se usó el hecho de que  $\hat{\mathbf{t}}_s = \vec{X}_{ss}$  pues  $s$  es la longitud de arco. Sustituyendo esta identidad en el sistema maestro de onda en (9), éste se transforma en el siguiente sistema:

$$\rho(s) \vec{X}_{tt} - \mathbf{T}(s, t) \vec{X}_{ss} = T_s(s, t)/(e + 1) \vec{X}_s + \rho(s) \vec{a}(s, t). \quad (12)$$

Cuando la tensión no varía con la longitud de arco  $s$  a lo largo de la cuerda, es decir,  $\mathbf{T}(s, t) = \mathbf{T}(t)$ , lo que parece razonable, si la cuerda esta hecha de un material bastante uniforme, tenemos

$$\rho_0 \vec{X}_{tt} - \mathbf{T}(t) \vec{X}_{ss} = \rho_0 \vec{a}(s, t).$$

En el caso en que la duración del movimiento no sea prolongado o que el material soporte la *fatiga*  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0$  obtenemos el sistema tipo ondulatorio forzado

$$\vec{X}_{tt} - c^2 \vec{X}_{ss} = \vec{a}(s, t),$$



donde esta vez  $c^2 = T_0/\rho_0$ . Si además las oscilaciones son suficientemente pequeñas  $s$  es próximo a  $x$  y entonces

$$\vec{X}_{tt} - c^2 \vec{X}_{xx} = \vec{a}(s, t). \quad (13)$$

Bajo la hipótesis de que el material es linealmente elástico se tiene que la tensión satisface la relación constitutiva dada en (11) por lo que tendremos que

$$T_s(s, t) = (k(\|\vec{X}_s\| - 1))_s = k \frac{\vec{X}_s \cdot \vec{X}_{ss}}{\|\vec{X}_s\|} = 0$$

donde  $\vec{X}_s \cdot \vec{X}_{ss}$  es el producto interno de  $\vec{X}_s$  y  $\vec{X}_{ss}$ , el cual es cero, en este caso, porque  $s$  es la longitud de arco. Sustituyendo este resultado en (12), obtenemos el sistema

$$\rho(s) \vec{X}_{tt} - k(\|\vec{X}_s\| - 1) \vec{X}_{ss} = \rho(s) \vec{a}(s, t).$$

Este sistema es altamente no lineal y sigue siéndolo aún en el caso de oscilaciones pequeñas:

$$\rho(x) \vec{X}_{tt} - k(\|\vec{X}_x\| - 1) \vec{X}_{xx} = \rho(x) \vec{a}(x, t).$$

Usando el desarrollo de Taylor de grado 1 para la función raíz cuadrada  $\sqrt{\cdot}$  alrededor de 1 nos lleva al siguiente sistema

$$\rho(x) \vec{X}_{tt} - \frac{k}{2} (\|\vec{X}_x\|^2 - 1) \vec{X}_{xx} = \rho(x) \vec{a}(x, t). \quad (14)$$

Ya que las variables  $x$  y  $t$  son independientes tenemos que el anterior sistema se reduce en una dimensión

$$\rho(x) \vec{X}_{tt} - \frac{k}{2} \|\vec{X}_x\|^2 \vec{X}_{xx} = \rho(x) \vec{a}(x, t).$$

donde ahora  $\vec{X}(x, t) = \begin{bmatrix} y(x, t) \\ z(x, t) \end{bmatrix} = y(x, t) + iz(x, t) = \psi(x, t)$ , es decir, podemos transformar el sistema anterior en una ecuación diferencial compleja altamente no lineal en la variable  $x$ :

$$\rho(x) \psi_{tt} - \frac{k}{2} |\psi_x|^2 \psi_{xx} = \rho(x) a(x, t). \quad (15)$$

donde incluso  $\rho$  ahora puede tomar valores complejos. Si consideramos una solución de la forma  $\psi(x, t) = \Theta(t) \psi(x)$  al sustituirla en (15) con  $a(x, t) = 0$  tenemos la versión compleja de una ecuación de Duffini para  $\Theta$ :

$$\Theta'' - \frac{k}{2} |\Theta|^2 \Theta = 0.$$

## 4.4. La ecuación de Schrödinger

Hemos visto en la sección previa la aparición de la no linealidad. Ahora veremos que si empezamos con una relación no lineal eventualmente llegaremos a una ecuación lineal. Esto lo realizaremos al considerar la suma de senos y cosenos escrita en forma compleja.

La ecuación de Schrödinger surge como resultado de los experimentos y teorías de la física en fenómenos de radiación las que llevaron a la conclusión de que había un comportamiento dual, llamado partícula onda.

Así, se tomó como punto de partida la ecuación compleja de onda clásica unidimensional

$$\psi_{tt} - c^2 \psi_{xx} = 0, \quad (16)$$

que puede obtenerse de la ecuación (13) procediendo en misma forma como lo hicimos para obtener la ecuación en (15) de la ecuación en (14). En otros términos se consideraron las soluciones complejas de la ecuación de onda. Cuando se consideran soluciones de la forma

$$\psi(x, t) = \Theta(t)\psi(x)$$

se encuentra, al sustituir en (16) que

$$\Theta = Ae^{\pm i\omega t}, \psi(x) = e^{\pm i(\omega/c)x}.$$

De modo que

$$\psi(x, t) = Ae^{\pm i(\omega/c)(x \pm ct)}.$$

Puesto que la ecuación de onda es EDP lineal la suma de ellas es nuevamente una solución.

Intuitivamente, tomando en cuenta que la integral es el límite de sumas, tendríamos que si  $k = \omega/c$  y considerando sólo las ondas que viajan a la derecha, entonces la función de valores complejos (función compleja) definida sobre los números reales

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ik(x-ct)} dk = \hat{A}(x - ct),$$

donde  $A$  es una función compleja definida sobre el conjunto de los números reales y el símbolo  $\hat{\phantom{A}}$  denota el operador de Fourier (transformada de Fourier), es una solución de la ecuación de onda. Hemos visto que haciendo un desarrollo de Taylor, ha dado lugar a una ecuación de Duffin la cual es no lineal. Si remplazamos la función lineal  $w(k) = ck$  por una función general, la llamada relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$ , conseguimos que

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \mathcal{F}(e^{-i\omega t} A)(x).$$

donde  $\mathcal{F}$  es otra notación para la transformada de Fourier.

La nueva función compleja, el llamado paquete de ondas,  $\psi(x, t)$  ya no es solución a la ecuación de onda, pero en ella podemos remplazar a la función  $\omega$  por su polinomio de Taylor de grado 2 en  $k_0$ :

$$T_{\omega, k_0, 2} = \alpha + \beta(k - k_0) + \gamma(k - k_0)^2.$$

en el lado derecho de la última ecuación para  $\psi$ , tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-i(T_{\omega, k_0, 2})t} A)(x) &= \mathcal{F}(e^{-i(\alpha + \beta(k - k_0) + \gamma(k - k_0)^2)t} A(k))(x) \\ &= e^{i(k_0 x - \alpha)t} \mathcal{F}(e^{-i\beta t k} e^{i\gamma t (k - k_0)^2} A(k)) \\ &= e^{i(k_0 x - \alpha)t} \mathcal{F}(e^{-i\gamma t k^2} A(k))(x - \beta t) \\ &= e^{i((k_0 x - \alpha)t + k_0 x)} \mathcal{F}(e^{-i\gamma t k^2} A(k + k_0))(x - \beta t). \end{aligned}$$

De la interpretación geométrica del producto de números complejo,  $k_0 - \alpha t + k_0 x$  es un desfase de  $\psi(x, t)$  respecto de la traslación de la transformada de Fourier en el lado derecho de esta última expresión. En consecuencia,  $k_0 x - \alpha$  se interpreta como la velocidad de desfase. El argumento  $x - \beta t$  indica que  $\psi(x, t)$  se traslada a la derecha a una velocidad  $\beta$ . Ahora consideraremos la transformada de Fourier en sí misma, la cual continuaremos denotando por  $\psi(t, x)$ :

$$\psi(x, t) = \mathcal{F}(e^{-i\gamma t k^2} A(k + k_0))(x).$$

Observemos que

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -i\gamma \mathcal{F}(k^2 e^{-i\gamma t k^2} A(k + k_0))(x)$$

y también que

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = i^2 \mathcal{F}(k^2 e^{-i\gamma t k^2} A(k))(x) = -\mathcal{F}(k^2 e^{-i\gamma t k^2} A(k))(x).$$

Ahora podemos concluir que esta transformada de Fourier satisface la EDP lineal de tipo parabólico (un ejemplo clásico de este tipo de ecuaciones es la ecuación del calor)

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = i\gamma \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2},$$

que es una ecuación de Schrödinger. Para hallar el valor particular de  $\gamma$  debemos considerar la frecuencia que debe tener la partícula onda u onda material o paquete de ondas (onda de De Broglie). Recordemos que la constante  $\beta$  es la velocidad con que el paquete de ondas se desplaza a la derecha

$$\beta = v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}.$$

Puesto que el paquete de ondas es una partícula, éste posee un momento  $p$  y una energía cinética  $E = p^2/2m$ . En consecuencia,

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{p}{m}.$$

Si además consideramos que la energía cinética  $E$  es dada por

$$E = \hbar\omega$$

la cual es sugerida por la relación cuántica para la radiación, donde  $2\pi\hbar$  es la bien conocida constante de Planck. En consecuencia la frecuencia buscada,  $\omega$  esta dada por

$$\omega = \frac{p^2}{2m\hbar}.$$

Por otra parte, De Broglie descubrió que la longitud de onda  $\lambda$  correcta es

$$\lambda = 2\pi \frac{\hbar}{p}.$$

Ya que la longitud de onda  $\lambda$  se relaciona con el llamado número de onda  $k$  por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar},$$

se tendrá la relación:

$$\omega(k) = \frac{(\hbar k)^2}{2m\hbar} = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m} k^2.$$

Puesto que

$$\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_{k_0},$$

se tiene

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m}.$$

Finalmente, conseguimos la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{i}{2} \frac{\hbar}{m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}.$$

Podemos usar otra relación de dispersión, por ejemplo,

$$w(k) = k - k^3$$

y ahora considerar

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega(k)t)} = e^{i x k - k t + k^3 t},$$

tenemos

$$\begin{aligned}\partial\psi/\partial t &= (k^3 - k)e^{ikx-kt+k^3t} \\ \partial\psi/\partial x &= ke^{ikx-kt+k^3t} \\ \partial^3\psi/\partial x^3 &= k^3e^{ikx-kt+k^3t}\end{aligned}.$$

De esta manera, tenemos la ecuación diferencial de tercer orden lineal

$$\psi_t - \psi_x + \psi_{xxx} = 0.$$

Podríamos sustituir el polinomio de Taylor de cualquier grado en la relación de dispersión y el resultado será necesariamente una EDP lineal de orden igual a ese orden.

En resumen, si aproximamos la amplitud de las vibraciones de una cuerda obtenemos no linealidad pero si aproximamos la relación de dispersión obtenemos linealidad. Puesto que esto se hace básicamente en el mismo objeto se esperaría una relación entre estos resultados. Veamos un ejemplo adicional.

El estudio realizado por Korteweg y de Vries [1895] sobre las olas en canales estrechos y lagos, después de mucha discusión y controversia (desde que J. Scott Russell entre 1838 y 1844 las observó y realizó innumerables experimentos) resolvió este problema. Ellos obtuvieron una ecuación no lineal gobernando a ondas (unidimensionales y largas) gravitacionales en superficies, y de pequeña amplitud propagándose en un canal muy largo y estrecho de agua:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right), \sigma = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{\rho g},$$

donde  $\eta$  es la elevación de la superficie del agua arriba de del nivel  $h$  de equilibrio,  $\alpha$  una constante arbitraria relacionada con el movimiento uniforme del líquido,  $g$  la constante gravitacional,  $T$  la tensión superficial y  $\rho$  la densidad superficial (los términos *largo* y *pequeño* son en comparación con la profundidad del canal). La controversia fue resuelta porque esta ecuación, ahora conocida como ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) posee soluciones permanentes conocidas actualmente como solitones. Esta ecuación puede escribirse una forma adimensional haciendo los cambios de variable

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}\tau, x = -\sigma^{-\frac{1}{2}}\xi, u = \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{3}\alpha.$$

Consecuentemente,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Esta es una de las formas en las que actualmente se presenta a la ecuación KdV.

En [1965] Kruskal y Zabusky obtuvieron nuevamente esta ecuación al convertir el modelo discreto de de Fermi, Pasta y Ulum [1955] en continuo, consistente de masas idénticas conectadas por resortes no lineales con ley de fuerza  $F(\Delta) = -K(\Delta + \alpha\Delta^2)$ . El sistema de movimiento gobernante es

$$m \frac{\partial^2 z_n}{\partial t^2} = (z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1})(1 + \alpha(z_{n+1} - z_{n-1})),$$

con  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $z_0 = z_N = 0$  y la condición inicial  $z_n(0) = \sin(n\pi/N)$ ,  $z_{n,t}(0)=0$ . La variable real  $z_n$  mide el desplazamiento de la  $n$ -ésima masa a partir del equilibrio. El modelo continuo se obtiene al expandir  $z_{n\pm 1}$  en sus series de Taylor, respectivamente y de los cambios de escala  $t' = \omega t$ , ( $\omega = \sqrt{K/m}$ ) y  $x' = x/h$ ,  $x = nh$ , donde  $h$  denota la longitud de los resortes. En este caso, se tiene

$$z_{tt} = z_{xx} + \epsilon z_x z_{xx} + \frac{1}{12} h^2 z_{xxxx} + O(\epsilon h^2, h^4),$$

donde  $\epsilon = 2\alpha h$  y se han suprimido las primas. Se hace una segunda reducción que consiste en buscar una aproximación asintótica de la forma

$$z \sim \phi(\xi, \tau), \xi = x - t, \tau = \frac{1}{2}\epsilon t$$

de manera que  $\phi_{xx} - \phi_{tt} \sim \phi_{\xi\tau}$ . Con esto en mano, se consigue

$$\phi_{\epsilon\tau} + \phi_{\xi}\phi_{\xi\xi} + \delta^2\phi_{\xi\xi\xi} + O(\epsilon h^2, h^4)$$

donde  $\delta^2 = \frac{1}{2}h^2\epsilon^{-1}$  y los términos  $O(\epsilon h^2, h^4)$  son pequeños. Si  $u = \phi_{\epsilon}$  se consigue

$$u_t + uu_{\xi} + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0.$$

Por otra parte se tiene que asintóticamente la solución  $u$  resuelve la ecuación

$$u_t + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0$$

la cual corresponde a la relación de dispersión  $\omega(k) = -\delta^2 k^3$ .

Este esquema para esta ecuación y las propiedades que posee ésta como solitones, leyes de conservación entre otras ha impulsado un método llamado método dispersión y que consiste de hacer un desarrollo asintótico de las soluciones lo que linealiza la ecuación en cuestión.

El método de dispersión ha sido aplicado a otras ecuaciones como la ecuación no lineal de Schrödinger (de la cual se deriva la ecuación de Duffini), seno-Gordon y muchas más. Esta actividad, que en nuestro días se ha intensificado, constituye actualmente una línea de investigación, llamada análisis no lineal.

De esta manera, el estudio de la cuerda vibrante ha contribuido a la solución de problemas como el de la onda material ó partícula onda de la mecánica cuántica, y sigue conduciendo a nuevas ideas y líneas de investigación.

# Bibliografía

- [1] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [2] LUZIN, N., SHENITZER, A., *Function: Part I*, Amer. Math. Monthly, 105:4 (1998), 59-67.
- [3] LUZIN, N., *Function: Part II*, Amer. Math. Monthly, 105:3 (1998), 263- 270.
- [4] MALTESE, G., *Taylor and John Bernoulli on the vibrating string: Aspects of dynamics of continuos systems of the begining of the 18th century*, Physis Riv. Internaz Storia Sci. (N. S.), 29:3 (1992), 703-744.
- [5] LANGER, R. E., *Fourier series: The genesis and evolution of a theory*, Amer. Math. Monthly, 54:7(1947), 1-86.
- [6] KLEINER, I., *Evolution of the function concept: A biref survey*, College Math. J., 20:4 (1989), 282-300.
- [7] KLINE, M., *Mathematical Though from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press., 1972
- [8] LÜTZEN, J., *Euler vision of a generalized partial did'erential calculus for a generalized kind of function*, Math. Mag., 56:5 (1983), 299-306.
- [9] \_\_\_\_\_, *The Prehistory of the Theory of Distributions*, Springer, 1982.
- [10] RÜTHING, D., *Some defnitions of concept of function from John Bernoulli to N. Bourbaki*, Math. Intelligencer, 6:4 (1984), 72-77.
- [11] SPEISER, D., *Clifford A. Truesdell's contributions to the Euler and Bernoulli edition*, J. Elasticity, 70 (2003), 34-53.
- [12] STRUIK, D. J., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvad Univ. Press, Cambridge, Massachusutts, 1969.
- [13] TRUESDELL, C., *Outline of the History of Flexible or Elastic Bodies to 1788*, J. Acoust. Soc. Amer., 32:12 (1960), 1647-1656.

- [14] VAN VLECK, E. B., *The influence of Fourier's series upon the development of mathematics*, Science, 39:995 (1914), 113-124.



## Capítulo 5

# Euler y la función zeta

Jaime Cruz Sampedro <sup>1</sup> Santos Hernández Hernández <sup>2</sup>

Margarita Tetlalmatzi Montiel <sup>3</sup>

*Zusammengestohlen aus Verschiedenem diesem und jenem.*

Ludwig van Beethoven

### Resumen

En este capítulo se describen algunas de las contribuciones que Euler realizó como pionero de la teoría analítica de números, haciendo énfasis en la persistente influencia que su trabajo – en la evaluación de la función  $\zeta(s)$  en los enteros positivos y en el descubrimiento de la relación fundamental entre  $\zeta(s)$  y los números primos– tuvo en la génesis y ha tenido en la evolución de esta importante rama de la matemática.

### 5.1. Introducción

---

<sup>1</sup>Área Académica de Matemáticas–UAEH. Estancia Sabática, Área de Análisis Matemático, UAM-Azcapotzalco, [sampedro@uaeh.edu.mx](mailto:sampedro@uaeh.edu.mx)

<sup>2</sup>Área Académica de Matemáticas, UAZ, [shh@mate.reduaz.mx](mailto:shh@mate.reduaz.mx)

<sup>3</sup>Área Académica de Matemáticas, UAHE, [tmontiel@uaeh.edu.mx](mailto:tmontiel@uaeh.edu.mx)

Aparte del 1, los números naturales  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , también conocidos como enteros positivos, se dividen en dos clases: los números *primos*: 2, 3, 5, 7, 11,  $\dots$ , y los números *compuestos*: 4, 6, 8, 9, 10, 12,  $\dots$ . Los números primos son especiales porque *todo número compuesto se puede expresar de manera única como producto de números primos*. Este hecho importantísimo en la teoría de números, conocido como el *Teorema Fundamental de la Aritmética*, nos permite pensar a los números primos como los bloques constitutivos de los números enteros.

Si nos propusiéramos escribir cuidadosamente una lista completa de los números primos, al avanzar en esa tarea advertiríamos de inmediato que

1. La lista parece ser interminable.
2. Cada vez es más difícil decidir si un número es primo o no lo es.
3. Los números primos se muestran de manera irregular y en general cada vez más alejados unos de otros.
4. Parece imposible determinar cual es el  $n$ -ésimo número primo.

Seguramente, observaciones como éstas motivaron a los antiguos griegos, que ya estaban familiarizados con el Teorema Fundamental de la Aritmética, a establecer de manera muy elegante algunos de los resultados básicos más importantes sobre los números primos. Por ejemplo, en la Proposición 20 del Libro IX de los *Elementos* de Euclides se demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.1.** *La colección de números primos es infinita.*

El razonamiento que presenta Euclides para demostrar este teorema es tan breve y tan bello que no podemos dejar de presentarlo aquí para deleite del lector.

*Demostración.* Si suponemos que la colección de números primos es finita, entonces podemos considerar al producto  $P$  de todos ellos y a  $Q = P + 1$ . Como  $Q$  es mayor que 1, por el Teorema Fundamental de la Aritmética  $Q$  debe tener al menos un factor primo, el cual necesariamente tiene que ser un factor de  $P$  y de  $Q - P = 1$ . Ya que esto último es imposible, la colección de números primos tiene que ser infinita.  $\square$

El estudio de las propiedades de los números primos, tales como su estructura y su distribución, ha fascinado a los matemáticos de todos los tiempos. Euler no fue la excepción y, aunque manifestaba que *tenía razones para creer que descubrir algún orden en la secuencia de los números primos era un misterio en el cual la mente nunca penetraría* [15], realizó una inmensa cantidad de contribuciones en el estudio de estos números, muchas de las cuales han trascendido hasta nuestros días. Por ejemplo, en 1737 Euler descubrió una demostración alternativa de la infinitud de los números

primos [17], introduciendo una brillante e innovadora idea que, además de permitirle establecer la divergencia de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots, \quad (1)$$

de los recíprocos de los números primos, sentó las bases que constituyeron el punto de partida de insospechados desarrollos que condujeron a la demostración de uno de los resultados más espectaculares de la matemática: el Teorema de los Números Primos [11, 17], y al planteamiento de uno de los problemas abiertos más importantes de la matemática de nuestro tiempo: la Hipótesis de Riemann [9, 11, 17, 27]. En ese entonces, Euler estaba interesado en evaluar

$$\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots, \quad (2)$$

para  $k \in \mathbb{N}$ , con  $k > 1$ , y su idea clave para establecer la divergencia de (1) consistió en considerar la serie

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad s > 1, \quad (3)$$

que se obtiene al reemplazar la variable entera  $k$  por la variable real  $s > 1$ , y en descubrir la identidad fundamental

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \frac{2^s \cdot 3^s \cdot 5^s \cdot 7^s \cdot 11^s \cdots}{(2^s - 1)(3^s - 1)(5^s - 1)(7^s - 1)(11^s - 1) \cdots} \\ &= \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \end{aligned} \quad (4)$$

en la cual aparecen los números primos en un lado pero no en el otro.

Desde el punto de vista del desarrollo de la matemática, la verdadera importancia de esta contribución de Euler no radica en el hecho de haber demostrado que la serie (1) es divergente, ni en haber dado una nueva demostración de la infinitud del conjunto de los números primos, sino en la genialidad de intuir una maravillosa e insospechada relación, que abrió toda una nueva área de investigación en matemáticas. Refiriéndose al papel de (4) en el estudio de la distribución de los números primos, Ingham [17] dice: *La contribución de Euler al tema es de importancia fundamental; porque su identidad, que puede ser considerada como el equivalente analítico del Teorema Fundamental de la Aritmética, constituye la base de prácticamente todo el trabajo subsecuente.*

En las páginas siguientes describimos algunas de las contribuciones germinales de Euler acerca de la función  $\zeta(s)$  que han jugado un papel central en la teoría analítica

de números. En la Sección 5.2 presentamos, sin muchos detalles técnicos, un panorama de la génesis y evolución de la función  $\zeta(s)$ , haciendo énfasis en el importante papel que Euler desempeñó como pionero de la teoría analítica de números y en la persistente influencia de su trabajo en esta importante rama de la matemática. En la Sección 5.3 establecemos la irracionalidad de  $e$ , demostrada por Euler en 1744 [4], y la de  $\pi$ , así como la trascendencia de  $e$ ,  $\pi$  y  $\zeta(2k)$ . En la Sección 5.4, siguiendo a Huylebrouck [16], demostramos la irracionalidad de  $\zeta(2)$ , utilizando un método que también provee la irracionalidad de  $\zeta(3)$  y exhibe una conexión entre la distribución de los números primos y la irracionalidad de los valores de  $\zeta(s)$  en los enteros positivos. Este método podría también ser útil para decidir el carácter aritmético de la constante  $\gamma$  de Euler [26]. Es pertinente comentar que para leer la mayor parte de este capítulo solamente se requieren conocimientos de cálculo diferencial e integral.

## 5.2. La función zeta y los números primos

La historia empezó probablemente con Nicole Oresme (1323-1382), quien demostró por vez primera que la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente, importante hecho que se deduce de la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

En 1650, Pietro Mengoli (1625-1686) planteó el problema de evaluar la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots, \quad (5)$$

en caso de ser convergente [3]. La convergencia de esta serie se establece usando por ejemplo el criterio de la integral, pero su evaluación es una meta mucho más ambiciosa. Este problema fue atacado sin éxito por John Wallis (1616-1703), Gottfried von Leibnitz (1646-1716) y Jacob Bernoulli (1654-1705). En su *Tractatus de seriebus infinitis*, publicado en 1689 en Basilea, Jacob escribió: *Si alguien encuentra y nos comunica eso que hasta ahora ha eludido nuestros esfuerzos, grande será nuestra gratitud* [15, 21]. A partir de entonces ese problema se conoció como el *Problema de Basilea* y fue Johann Bernoulli (1667-1748), hermano menor de Jacob y en ese entonces mentor de Euler, quien seguramente le sugirió a este último investigar la evaluación de esa suma. Después de calcular el valor de la suma con veinte decimales correctos

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1,64493\,40668\,48226\,43647\cdots,$$

Euler reportó en 1735 que había encontrado la elegante e inesperada fórmula

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \quad (6)$$

que *depende de la cuadratura del círculo* [21]. Los argumentos originales de Euler para obtener este resultado se pueden ver en el capítulo sobre Euler y la Teoría de Números de este volumen o en [3, 10, 15, 21]. Una demostración alternativa se presenta adelante en la Sección 5.3.

El espectacular triunfo en la solución del Problema de Basilea, que sin lugar a dudas le abrió las puertas para ingresar a la élite matemática de su época, seguramente motivó a Euler a considerar el problema de evaluar las series convergentes de la familia definida en (2), de la cual el problema de Mengoli (5) es sólo un caso especial. En 1748 Euler ya conocía los valores de  $\zeta(k)$  para  $k = 2, 4, \dots, 26$ ; por ejemplo, además de (6), había encontrado

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{y} \quad 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}.$$

En 1750 Euler reportó el resultado general

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}, \quad (7)$$

en donde los  $B_{2k}$  son los llamados Números de Bernoulli. Estos números se pueden definir a través de la expansión de Taylor

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k, \quad (8)$$

a partir de la cual se verifica fácilmente que  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -1/30$  y  $B_6 = 1/42$ . La prueba de (7) está en la Sección 5.3.

No debe sorprendernos sin embargo que Euler no pudiera evaluar  $\zeta(2k+1)$ , ni siquiera para  $k = 1$ , pues hasta la fecha, éste sigue siendo un problema abierto y a la comunidad matemática, que sigue manteniendo un gran interés por estos números, le gustaría conocer por lo menos su carácter aritmético; es decir, si son racionales o irracionales. En 1978 Roger Apéry (1916-1994) demostró que  $\zeta(3)$  –hoy en día conocido como *constante de Apéry*– es un número irracional [1]. Actualmente se sabe que  $\zeta(2k+1)$  es irracional para una infinidad de valores de  $k \in \mathbb{N}$  y que al menos uno de los números  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$ ,  $\zeta(11)$  es irracional [6, 29], pero no se sabe si, por ejemplo,  $\zeta(5)$  es racional o no.

Euler también estudió con sumo interés la serie (2) cuando  $k = 1$ , no obstante que en esa situación se obtiene la divergente serie armónica. Por ejemplo, tal vez para encontrar un sustituto de  $\zeta(1)$ , Euler consideró el número

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right), \quad (9)$$

conocido actualmente como *constante de Euler*, cuyo valor exacto seguramente trató de calcular sin mucho éxito. El valor aproximado de  $\gamma$  es  $0,5772156649 \dots$  y, aunque recientemente ha habido importantes progresos [26], hasta la fecha tampoco se sabe si  $\gamma$  es racional o irracional. Es pertinente mencionar que el nombre del geómetra Lorenzo Mascheroni (1750-1800) también suele asociarse con esta constante, por haber introducido el uso del símbolo  $\gamma$  para denotarla.

Aunque poco rigurosa en el sentido matemático actual, mucho más interesante y profunda es la siguiente relación entre la serie armónica y los números primos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdots}$$

que Euler obtuvo en 1737, la cual puede expresarse en notación moderna como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}. \quad (10)$$

Al referirse a la manera en que Euler obtuvo esta relación, André Weil expresó: *bien podría considerarse que estas investigaciones marcan el nacimiento de la teoría analítica de números* [10].

Usando esta relación Euler dio una nueva demostración del Teorema 5.1.1.

*Demostración.* Si el conjunto de los números primos fuera finito, el lado derecho de (10) sería finito y por lo tanto la serie armónica sería convergente. Como esto último no es cierto, el conjunto de los números primos es infinito.  $\square$

Evidentemente, el resultado no es nuevo pero el modo de obtenerlo es impresionantemente original y puede hacerse riguroso de la manera siguiente.

*Demostración.* Supogamos que la lista de todos los números primos es  $p_1, \dots, p_n$ . Ya que todo entero positivo  $k$  se puede escribir de manera única como producto de números primos, digamos  $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ , entonces

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{p_n^{\alpha_n}}. \quad (11)$$

Recordando que

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1 - r}, \quad \text{si } |r| < 1, \quad (12)$$

en vista de que  $1/p_i < 1$ , para todo  $N \in \mathbb{N}$  se tendría

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}, \quad (13)$$

lo cual es imposible pues el extremo derecho de esta desigualdad es independiente de  $N$ , mientras que al hacer tender  $N$  a infinito el extremo izquierdo tiende a infinito, por la divergencia de la serie armónica.  $\square$

Un argumento riguroso alternativo se puede dar utilizando el siguiente

**Teorema 5.2.1.** Para  $s > 1$  se satisface

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}. \quad (14)$$

*Demostración.* Ya que  $s > 1$ , se verifica fácilmente con el criterio de la integral que la serie del lado izquierdo de (14) es absolutamente convergente. Luego, usando (11) y (12) se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left( 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots \right) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

$\square$

Utilizando (14), la demostración de Euler del Teorema 5.1.1 se puede formalizar del siguiente modo. Si el conjunto de los números primos fuera finito, entonces el producto del lado derecho de (14) tendría un número finito de factores y, al hacer tender  $s$  a 1, llegaríamos a una contradicción al obtener que la serie armónica es convergente.

Los argumentos anteriores muestran que al establecer la relación (10), Euler implícitamente introdujo el uso de los conceptos de continuidad, límite y desigualdades en el estudio de los números primos; es decir, el uso del análisis real en el estudio de los entes matemáticos más discretos, los números enteros; hecho que según Dunham [10] *solamente un loco o un genio se atrevería a proponer*.

Como un interesante corolario de (14), Euler obtuvo la fórmula

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{p^2}{p^2 - 1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdots}$$

que establece una conexión entre  $\pi$  y los números primos; sin embargo, la importancia de (10) en el estudio de los números primos realmente comenzó a ponerse de manifiesto con el resultado de Euler que enseguida demostramos, siguiendo a Ingham [17].

**Teorema 5.2.2.** *La serie*

$$\sum_{p \text{ primo}}^{\infty} \frac{1}{p} \quad (15)$$

*es divergente.*

*Demostración.* Primero note que si  $0 < u < 1$  entonces

$$\log \frac{1}{1-u} = \int_0^u \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^u t^n dt = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots$$

y por lo tanto

$$\log \frac{1}{1-u} - u = \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \dots \leq \frac{u^2}{2} (1 + u + u^2 + \dots) \leq \frac{u^2}{2(1-u)}. \quad (16)$$

Definamos ahora, para  $x > 2$ ,

$$S(x) = \sum_{p \text{ primo} \leq x} \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad P(x) = \prod_{p \text{ primo} \leq x} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}.$$

Usando (16) se sigue que

$$\begin{aligned} \log P(x) - S(x) &= \sum_{p \text{ primo} \leq x} \left( \log \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) - \frac{1}{p} \right) \\ &\leq \sum_{p \text{ primo} \leq x} \frac{1}{2p^2 \left( 1 - \frac{1}{p} \right)} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$S(x) \geq \log P(x) - \frac{1}{2}.$$

Razonando como en la deducción de (13) se concluye que  $P(x)$  tiende a infinito, cuando  $x$  tiende a infinito, y consecuentemente la serie (15) es divergente.  $\square$



Euler también demostró que la serie

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{29} + \cdots$$

de los recíprocos de los números primos de la forma  $4n+1$  es divergente y por lo tanto que hay una infinidad de números primos de esa forma [10]. A este respecto, el lector puede verificar fácilmente que los números primos impares son de la forma  $4n+1$  o de la forma  $4n-1$  y demostrar, utilizando un argumento análogo al de Euclides, que hay una infinidad de números primos de la forma  $4n-1$  pero que ese argumento no funciona en el caso de los primos de la forma  $4n+1$ . Euler, además, conjeturó que la suma

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{401} + \frac{1}{601} + \frac{1}{701} + \cdots$$

de los recíprocos de los primos de la forma  $100k+1$  también es infinita y consecuentemente que también hay una infinidad de números primos de este tipo. Euler no demostró esa conjetura pero es indudable que una generalización natural de la misma, formulada en 1798 por Adrien-Marie Legendre (1752-1833) [13], es que en cualquier progresión aritmética  $a, a+k, a+2k, a+3k, \dots$ , en donde  $a$  y  $k$  son primos relativos, hay una infinidad de números primos.

Esta conjetura de Legendre fue demostrada en 1837 por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Para obtener este resultado, Dirichlet introdujo generalizaciones de la función  $\zeta(s)$  de la forma

$$L(s, \chi) = \frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \frac{\chi(4)}{4^s} + \cdots, \quad s > 1, \quad (17)$$

en donde  $\chi$  es una función denominada carácter, que entre otras propiedades debe satisfacer  $\chi(nm) = \chi(n)\chi(m)$  para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$  [2], la cual le permitió establecer la fórmula

$$L(s, \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \quad s > 1,$$

análoga a la identidad (14) de Euler.

En la demostración de su teorema sobre la infinitud de números primos en progresiones aritméticas, además de exhibir la verdadera fuerza del análisis en el estudio de la teoría de números, Dirichlet introdujo conceptos trascendentales tales como los de *carácter* y *series L de Dirichlet* (17), que en la actualidad juegan un papel fundamental en la teoría analítica de números [2]. Tal vez por estas razones, aunadas al cautivador encanto del teorema, algunos autores [7, 8, 13] consideran a Dirichlet como el padre de esta importante rama de la matemática. Por otra parte, autores como Dunham [10] opinan que, *con este resultado Dirichlet anunció con bombos y platillos*

*el ingreso de la teoría analítica de números a su etapa madura, como una disciplina poderosa (...) si Euler no merece realmente ser llamado el padre de la teoría analítica de números, reconozcámosle al menos su calidad de auténtico abuelo.*

Por otra parte, como una consecuencia de (10), hacia 1737 Euler aparentemente enunció y argumentó la afirmación de que el número de primos menores o iguales a  $n$  es aproximadamente igual a  $\log n$  [21]. Ésta parece ser la primera forma de lo que actualmente se conoce como el Teorema de los Números Primos, y aunque no es realmente correcta, sí vislumbra una conexión de (14) y de los logaritmos en base  $e$  con el problema de la distribución de los números primos. No sería sino hasta finales del siglo XIX cuando Legendre y Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quienes a partir de meticulosas construcciones de tablas de números primos, conjeturaron independientemente que si

$$\pi(x) = \text{el número de primos } p \text{ que satisfacen } 2 \leq p \leq x, \quad (18)$$

entonces el cociente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1. \quad (19)$$

Gauss en realidad conjeturó que

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad (20)$$

en donde

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

y  $o(g(x))$  representa una función  $f(x)$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$ . Utilizando la regla de L'Hospital se verifica fácilmente que  $\log x \text{ Li}(x)/x \rightarrow 1$ , cuando  $x \rightarrow \infty$ , y por lo tanto (19) es equivalente a (20).

El primer intento significativo para demostrar esta conjetura lo realizó en 1851 Pafnuti L. Tchevyshev (1821-1894), quien introdujo las funciones

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{y} \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p, \quad x > 0, \quad (21)$$

en donde la segunda suma se extiende sobre todos los pares  $(p, m)$  para los cuales  $p$  es número primo y  $m$  un entero positivo tal que  $p^m \leq x$ , y demostró el siguiente teorema.

**Teorema 5.2.3.** Sean  $\vartheta$  y  $\psi$  las funciones de Tchevyshev definidas en (21). Si uno de los tres cocientes

$$q_1(x) = \frac{\vartheta(x)}{x}, \quad q_2(x) = \frac{\psi(x)}{x}, \quad q_3(x) = \frac{\pi(x) \log x}{x} \quad (22)$$

converge a algún límite cuando  $x$  tiende a infinito, entonces los otros dos también y todos los límites son iguales.

*Demostración.* Para  $i = 1, 2, 3$  sean

$$\Lambda_i = \limsup_{x \rightarrow \infty} q_i(x) \quad \text{y} \quad \lambda_i = \liminf_{x \rightarrow \infty} q_i(x).$$

Es suficiente demostrar que  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$  y que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . Para empezar notemos que si  $p$  es número primo menor o igual a  $x$ , entonces  $p^m \leq x$  si y sólo si  $m \leq [\log x / \log p]$ , en donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$ , y por lo tanto

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[ \frac{\log x}{\log p} \right] \log p. \quad (23)$$

Luego para todo  $x > 0$  se tiene

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \pi(x) \log x$$

y consecuentemente

$$\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \Lambda_3. \quad (24)$$

Fijemos  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces, por la definición de  $\pi(x)$  y la monotonía de  $\log x$ ,

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^\alpha \leq p \leq x} \log p \geq (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \log x^\alpha.$$

Luego, al usar  $\pi(x^\alpha) \leq x^\alpha$ , se obtiene

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \geq \alpha \left( \frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{\log x}{x^{1-\alpha}} \right)$$

y por lo tanto  $\Lambda_1 \geq \alpha \Lambda_3$ . Al hacer tender  $\alpha$  a 1 se obtiene  $\Lambda_1 \geq \Lambda_3$ , que combinada con (24) nos da  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3$ . Ya que los argumentos anteriores siguen válidos si reemplazamos  $\Lambda$  por  $\lambda$ , la proposición está demostrada.  $\square$

Tchevyshev también demostró que si el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$  existe, entonces su valor tiene que ser igual a 1 pero, aunque estableció las cotas

$$0,92129 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} \leq 1 \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} \leq 1,10555,$$

fracasó en sus intentos por demostrar que ese límite existe.

El siguiente avance importante hacia la demostración de la conjetura de Gauss y Legendre fue realmente contundente y lo realizó Bernhard Riemann (1826-1866) en 1859. En su famosa memoria de ocho páginas intitulada *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Riemann introdujo la idea de reemplazar en (3) la variable real  $s$  por la variable compleja  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 1$ , e investigar la función resultante

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re } s > 1, \quad (25)$$

así como la fórmula correspondiente a la identidad fundamental (14) de Euler, con los métodos de la teoría de funciones analíticas. No obstante que la serie (25) es convergente solamente si  $\text{Re } s > 1$ , Riemann ideó una forma de extender de manera única esta función a todo el plano complejo, obteniendo una función analítica en todo punto, excepto en  $s = 1$ , en donde tiene un polo de orden 1. A esta función se le conoce actualmente como la *función zeta de Riemann* y se denota por  $\zeta(s)$ , notación introducida por su autor; y aunque no era el interés primordial de Riemann investigar la función  $\pi(x)$ , en su memoria enuncia y bosqueja las demostraciones de varios resultados importantes que vinculan la localización de los ceros de  $\zeta(s)$  con el comportamiento de  $\pi(x)$ , cuando  $x$  tiende a infinito.

Los problemas planteados por Riemann en su famosa memoria inspiraron las investigaciones de Jacques Hadamard (1865-1963) y de Hans von Mangoldt (1854-1925) que condujeron a uno de los resultados más profundos de toda la matemática. En 1896, Hadamard y Charles-Jean de La Vallée Poussin (1866-1962) casi simultáneamente demostraron el

**Teorema 5.2.4.** (Teorema de los Números Primos) *Si  $\pi(x)$  es como en (18) entonces*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1. \quad (26)$$

Este teorema establece de manera definitiva la relación, anticipada por Euler y corroborada por Gauss y Legendre, entre la distribución de los números primos y los logaritmos en base  $e$ , así como el papel fundamental, visualizado por Euler, impulsado por Riemann y confirmado por Hadamard y de la Vallée Poussin, que la función  $\zeta(s)$  juega en la teoría analítica de números. Pruebas elementales de este teorema fueron descubiertas hasta 1949 por Erdős y Selberg [22]. Citando a Goldstein [13]: *La historia del Teorema de los Números Primos suministra un bello ejemplo de la forma en la cual las grandes ideas se interrelacionan y se desarrollan, nutriéndose unas a otras con el fin de producir una teoría coherente que explique completamente los fenómenos observados.*

Aunque la demostración de este teorema queda fuera del alcance de este trabajo, es importante señalar que la clave en las pruebas respectivas de Hadamard y de de la

Vallée Poussin fue demostrar que  $\zeta(1 + it) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , hecho que resulta ser equivalente a la relación

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x \exp(-c\sqrt{\log x})), \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty,$$

para alguna constante  $c > 0$ . Aquí,  $O(g(x))$  representa una función  $f(x)$  para la cual existe  $C > 0$  tal que  $|f(x)| \leq Cg(x)$ , para toda  $x$  suficientemente grande.

El lector interesado puede ver las demostraciones de Hadamard y de de La Vallée Poussin en [11]. Una demostración bastante corta se encuentra en [18]. Otras demostraciones pueden encontrarse por ejemplo en [2, 17, 23].

Es interesante mencionar que para el enésimo primo  $p_n$ , el Teorema de los Números Primos implica que cuando  $n$  tiende a infinito se tiene

$$p_n \sim n \log n,$$

es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{p_n} = 1. \quad (27)$$

En efecto, ya que  $\pi(p_n) = n$ , usando (26) con  $x = p_n$  tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log p_n}{p_n} = 1,$$

de donde se concluye que  $\log n + \log \log p_n - \log p_n \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log p_n} = 1$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log p_n}{p_n} \frac{\log n}{\log p_n} = 1.$$

Dejamos al lector demostrar que la implicación opuesta también es correcta, es decir, (27) implica (26).

Una relación muy importante propuesta por Riemann para el estudio de la función  $\zeta(s)$  es la identidad

$$\zeta(1 - s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s), \quad (28)$$

conocida como *ecuación funcional de la función zeta*, que relaciona a  $\zeta(s)$  con  $\zeta(1 - s)$ , en donde  $\Gamma$  es la función gamma de Euler, definida para  $s > 0$  como

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt,$$

la cual satisface  $\Gamma(n+1) = n!$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Nos parece importante apuntar que la ecuación funcional (28) fue descubierta por Euler en 1749, casi 110 años antes que Riemann [3]. A este respecto André Weil sostiene [3] que *la evidencia externa apoya fuertemente el punto de vista de que Riemann estaba muy familiarizado con las contribuciones de Euler*.

Probablemente la simetría de  $\zeta(s)$  con respecto a la recta  $\sigma = 1/2$ , que sugiere la ecuación funcional (28), fue el germen de los razonamientos que condujeron a Riemann a formular la siguiente

**Conjetura.** Si  $\zeta(\sigma + it) = 0$  y  $\sigma > 0$ , entonces  $\sigma = 1/2$ .

Esta conjetura es la famosa *Hipótesis de Riemann*, que ha resistido por casi ciento cincuenta años todos los intentos para demostrarla y es, hasta la fecha, uno de los problemas abiertos más célebres de toda la matemática [9, 15].

La relación de Euler (14) entre la función  $\zeta(s)$  y los números primos realmente fue llevada por Riemann hasta sus últimas consecuencias, pues von Koch [28] demostró que si la Hipótesis de Riemann es correcta, entonces

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x), \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Más aún, si  $\psi(x)$  es la función de Tchevyshev definida en (21), entonces la Hipótesis de Riemann es correcta si y sólo si, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Así, esta última relación, considerada como la versión óptima del Teorema de los Números Primos, es equivalente a la Hipótesis de Riemann [13].

Da la impresión que todo lo relacionado con  $\zeta(s)$  parece haber empezado con Euler. Citando a [21] *el lector puede preguntarse por qué  $\zeta(s)$  se llama función zeta de Riemann y no función zeta de Euler. Un comediante matemático dijo alguna vez que si a todo lo que Euler inició se le atribuyera su nombre, entonces todo lo importante en matemáticas se apellidaría Euler y en ese caso podríamos mejor cambiar el nombre de esta ciencia por el de Eulermática*. Lo cierto es que Euler no da indicios de considerar a la serie que define a  $\zeta$  como una función del exponente  $s$ . Por ejemplo, Euler considera (14) como una igualdad de dos expresiones infinitas, no como la descripción de una propiedad de una función. Riemann sin embargo sí ve a  $\zeta(s)$  como una función y usa continuación analítica para extenderla a todo el plano complejo [21].

No sabemos si Euler imaginó los espectaculares logros que se alcanzarían en el estudio de los números primos, los cuales abrirían a la mente la posibilidad de penetrar

en el misterioso orden de éstos números, pero es indudable que sus ideas germinales fueron importantes fuentes de inspiración de los trabajos realizados en este campo por Dirichlet, Tchevyshev y Riemann, quienes a su vez inspiraron e impulsaron a toda una pléyade de grandes matemáticos tales como Hadamard, von Mangoldt, de la Vallée Poussin, Landau, Hardy, Littlewood, Ramanujan, Siegel, Pólya, Lindelöf, Bohr, Artin, Hecke, Erdős, Selberg, Vinogradov y Serre, responsables de los resultados más profundos obtenidos hasta ahora acerca de  $\zeta(s)$  y los números primos [11].

### 5.3. Irracionalidad y trascendencia

Sin lugar a dudas, una de las fórmulas matemáticas más elegantes y concisas es

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (29)$$

desarrollada por Euler a partir de un descubrimiento de A. De Moivre (1667-1754), la cual involucra los cinco números más notables de toda la matemática. Sorprendentemente, como se verá al final de esta sección, la fórmula (29) juega un papel importante en la demostración de la trascendencia de  $\pi$  y en consecuencia en la de  $\zeta(2n)$ . La relevancia matemática de  $\pi$  fue reconocida por Arquímedes de Siracusa (287-212 a J. C.), la de  $e$  por John Napier (1550-1617) y la de  $i$  por Geronimo Cardano (1501-1576) pero fue Euler quien introdujo el uso de los símbolos  $\pi$ ,  $i$  y  $e$ ; notación matemática estándar que actualmete utilizamos para representarlos. En 1748, en su *Introductio in Analysin Infinitorum*, probablemente su libro de texto más conocido [7, 12], Euler introdujo la versión en serie de potencias de una de las funciones más importantes de la matemática

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (30)$$

y reconoció inmediatamente que el número

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \quad (31)$$

que obtuvo al hacer  $x = 1$  en (30), es la base de los logaritmos naturales. Euler demostró en 1744 que  $e$  es un número irracional [4].

La demostración de la irracionalidad de  $e$  que presentamos a continuación muestra la idea central que seguiremos en todos los demás casos presentados aquí. Esta idea consiste en obtener una contradicción a partir de una identidad que, como consecuencia de suponer que el teorema es falso, tiene su primer miembro en  $\mathbb{Z}$  y el valor absoluto del segundo en el intervalo abierto  $(0, 1)$ .

**Teorema 5.3.1.** *El número  $e$  es irracional.*

*Demostración.* Supongamos que  $e$  es racional; es decir,  $e = p/q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$ , entonces

$$q!e - q! \left( 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{q!} \right) = q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Esto es imposible pues el lado izquierdo es un entero mientras que el derecho satisface

$$\begin{aligned} 0 < q! \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{q!}{(q+1)!} \left( 1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \cdots \right) \\ &< \frac{1}{q+1} \left( 1 + \frac{1}{q+1} + \left( \frac{1}{q+1} \right)^2 + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

□

Antes de considerar situaciones más sofisticadas, presentamos una bellísima *demonstración geométrica* de la irracionalidad de  $e$  descubierta recientemente por J. Sondow [25].

*Demostración.* Definamos el intervalo  $I_1 = [2, 3]$  y supongamos definido  $I_n$ . Por inducción definimos  $I_{n+1}$  como el segundo intervalo cerrado que se obtiene al dividir  $I_n$  en  $n+1$  partes iguales. Note que para toda  $n \geq 2$  se tiene

$$I_n = \left[ 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{2}{n!} \right] = \left[ \frac{a_n}{n!}, \frac{a_n + 1}{n!} \right],$$

con  $a_n \in \mathbb{N}$ , y que

$$\frac{a_n}{n!} < e < \frac{a_n + 1}{n!}.$$

Luego, si  $e = p/q$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\frac{a_q}{q!} < \frac{p(q-1)!}{q!} < \frac{a_q + 1}{q!}$$

y por lo tanto  $a_q < p(q-1)! < a_q + 1$ , lo cual es imposible. □

Recomendamos al lector que dibuje los intervalos  $I_n$ , siguiendo las indicaciones dadas por inducción.

En virtud de que el cuadrado de un número irracional no necesariamente es irracional, es natural preguntarse si las potencias de  $e$  también son irracionales. Es pertinente mencionar que la irracionalidad de  $e^2$  fue establecida por Liouville en 1840, casi un siglo después de que Euler demostrara la de  $e$  [4]. La demostración del siguiente teorema sigue de cerca a Hardy–Wright [14].



**Teorema 5.3.2.** Si  $p \in \mathbb{N}$  entonces  $e^p$  es irracional.

*Demostración.* Para  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos la función polinomial

$$F(x) = p^{2n} f(x) - p^{2n-1} f'(x) + \cdots - p f^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x),$$

en donde

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}. \quad (32)$$

Teniendo en cuenta que  $f^{(2n+1)} \equiv 0$ , se verifica fácilmente que

$$(e^{px} F(x))' = e^{px} p^{2n+1} f(x)$$

y al integrar de 0 a 1 se encuentra

$$e^p F(1) - F(0) = \int_0^1 p^{2n+1} e^{pt} f(t) dt.$$

Si  $e^p$  es racional, entonces  $e^p = a/b$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, de la última relación se deduce que para toda  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$aF(1) - bF(0) = b \int_0^1 p^{2n+1} e^{pt} f(t) dt. \quad (33)$$

A continuación demostraremos que:

1. Para toda  $n \in \mathbb{N}$ , el lado izquierdo de (33) es un entero.
2. Si  $n$  es suficientemente grande, el lado derecho de (33) pertenece a  $(0,1)$ .

Como esto es imposible se concluye que  $e^p$  es irracional.

Para demostrar (1), por la definición de  $F$  y el hecho de que  $f(x) = f(1-x)$ , basta probar que  $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ , para  $k \geq 0$ . Como

$$f(x) = \frac{1}{n!} (c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \cdots + c_{2n} x^{2n}),$$

con  $c_i \in \mathbb{Z}$ , se sigue que la  $k$ -ésima derivada  $f^{(k)}(0) = c_k k! / n!$ , para  $n \leq k \leq 2n$ , y  $f^{(k)}(0) = 0$  para todos los demás  $k \geq 0$ . Luego  $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$  para todo  $k \geq 0$ .

Para demostrar (2) note que si  $n$  es suficientemente grande entonces

$$0 < b \int_0^1 p^{2n+1} e^{pt} f(t) dt \leq \frac{b p e^p p^{2n}}{n!} < 1,$$

ya que, por el criterio del cociente, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n}}{n!}$  es convergente y por lo tanto su término general tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.  $\square$

**Corolario 5.3.3.** Si  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , entonces  $e^r$  es irracional.

*Demostración.* Demuéstrelo mentalmente.  $\square$

A continuación demostraremos que el número  $\pi$  de Arquímedes es irracional. Este resultado fue demostrado por Lambert en 1761. La breve demostración que presentamos enseguida, la cual establece la irracionalidad de  $\pi^2$  y por lo tanto la de  $\pi$ , fue propuesta por Ivan Niven en 1947 [19].

**Teorema 5.3.4.**  $\pi^2$  es irracional.

*Demostración.* Si  $\pi^2$  es racional, escribamos  $\pi^2 = a/b$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$ , y definamos el polinomio

$$F(x) = b^n \left[ \pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \right],$$

en donde  $f$  es como en (32). Se verifica similarmente al teorema anterior que  $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ , y puesto que  $F(x) = F(1-x)$  se tiene que  $F(0)$  y  $F(1)$  son números enteros. Note ahora que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{F'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi F(x) \cos \pi x\} &= \{F''(x) + \pi^2 F(x)\} \operatorname{sen} \pi x \\ &= b^n \pi^{2n+2} f(x) \operatorname{sen} \pi x \\ &= \pi^2 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x. \end{aligned}$$

Luego, para todo  $n$ ,

$$\pi \int_0^1 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx = \left[ \frac{F'(x) \operatorname{sen} \pi x}{\pi} - F(x) \cos \pi x \right]_0^1 = F(1) + F(0)$$

es un número entero y por otra parte

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f(x) \operatorname{sen} \pi x \, dx \leq \frac{\pi a^n}{n!} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\pi^2$  es irracional.  $\square$

La irracionalidad de  $\sqrt{2}$ ,  $e$  ó  $\pi$  puede expresarse diciendo que estos números no son soluciones de ninguna ecuación de la forma

$$bx + a = 0, \tag{34}$$

con  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , y la irracionalidad de  $e^n$  equivale a decir que  $e$  no satisface ninguna ecuación de la forma

$$bx^n + a = 0, \tag{35}$$

con  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ . En este sentido, podemos decir que el número  $\sqrt{2}$  no es tan irracional como  $e$  pues, aunque no satisface una ecuación del tipo (34), sí satisface la ecuación  $x^2 - 2 = 0$  que es del tipo (35). La situación de los números  $e$  y  $\pi$  es aún más interesante pues, como veremos a continuación, no satisfacen ninguna *ecuación algebraica*; es decir, de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad (36)$$

en donde los  $a_i \in \mathbb{Z}$  y  $a_0 \neq 0$ .

Un *número algebraico* es un número  $x$  que satisface una ecuación de la forma (36). Por ejemplo  $i$ ,  $5$  y  $\sqrt{2}$  son números algebraicos. Los números que no son algebraicos se denominan *trascendentes*. El resultado siguiente establece la trascendencia de  $e$  y se debe a Charles Hermite (1822-1901). La idea general de la demostración que presentamos enseguida es la misma que la utilizada para establecer la irracionalidad de  $e$  y sigue de cerca a Hardy–Wright [14].

**Teorema 5.3.5.** *El número  $e$  es trascendente.*

*Demostración.* Si  $e$  no es trascendente, entonces para algún  $n$ , fijo de ahora en adelante, existen enteros  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $a_0 \neq 0$ , tales que

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n = 0. \quad (37)$$

Consideremos la función polinomial

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{((n+1)p-1)}(x),$$

en donde

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \cdots (n-x)^p, \quad (38)$$

con  $p$  un número primo que más adelante será elegido suficientemente grande. Como  $f^{((n+1)p)} \equiv 0$ , se verifica fácilmente que

$$(e^{-x} F(x))' = -e^{-x} f(x)$$

y al integrar de 0 a  $x$  se deduce

$$F(0)e^x - F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt. \quad (39)$$

Luego, al evaluar (39) en  $x = k$ , multiplicar el resultado por  $a_k$  y sumar sobre  $k$  se obtiene

$$F(0) \sum_{k=0}^n a_k e^k - \sum_{k=0}^n a_k F(k) = \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t) dt,$$

de donde al usar (37) resulta

$$a_0 F(0) + \sum_{k=1}^n a_k F(k) = - \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t) dt. \quad (40)$$

Enseguida demostraremos que si  $p$  es suficientemente grande, entonces:

1. El lado izquierdo de (40) es un número entero distinto de cero.
2. El valor absoluto del lado derecho es menor o igual a  $1/2$ .

Como esto no es posible concluimos que  $e$  es trascendente.

Para establecer (1) basta probar que  $F(k)$  es divisible por  $p$ , para  $k = 1, \dots, n$ , y que  $a_0 F(0)$  es un entero no divisible por  $p$ , si  $p$  es suficientemente grande. Para este fin notemos primero que  $f(x)$  tiene un cero de orden  $p-1$  en  $x=0$  y uno de orden  $p$  en  $x=1, \dots, n$ . Por lo tanto  $f^{(r)}(0) = 0$  si  $r \leq p-2$  y  $f^{(r)}(m) = 0$  si  $r \leq p-1$  y  $m = 1, \dots, n$ ; además, aplicando la regla de Leibniz

$$(hg)^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} h^{(r-i)}(x) g^{(i)}(x),$$

con  $h(x) = x^{p-1}/(p-1)!$  y  $g(x) = (1-x)^p(2-x)^p \dots (n-x)^p$ , se tiene

$$f^{(r)}(0) = \begin{cases} (n!)^p, & \text{si } r = p-1, \\ \binom{r}{p-1} g^{(r-p+1)}(0), & \text{si } r \geq p; \end{cases} \quad (41)$$

y con  $h(x) = (m-x)^p/(p-1)!$  y  $g(x) = x^{p-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^n (j-x)^p$  se obtiene

$$f^{(r)}(m) = -p \binom{r}{p} g^{(r-p)}(m) \quad r \geq p. \quad (42)$$

De (41), (42) y las observaciones que les preceden se concluye que si  $r = 0, 1, 2, \dots$  y  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ , entonces  $f^{(r)}(m)$  es divisible por  $p$ , excepto tal vez  $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ . Se sigue que  $F(k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , y  $F(0) - f^{(p-1)}(0)$  son divisibles por  $p$ . Además, si  $p > \max\{n, |a_0|\}$ , entonces  $a_0$  y  $f^{(p-1)}(0)$  no son divisibles por  $p$  y por consiguiente tampoco lo es  $a_0 F(0)$ . Esto demuestra (1).

Para demostrar (2) observe que si  $0 \leq t \leq n$ , entonces

$$|f(t)| \leq \frac{t^{p-1}(n+t)^{np}}{(p-1)!} \leq \frac{2^{np} n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k e^k \int_0^k e^{-t} f(t) dt \right| &\leq \sum_{k=0}^n |a_k| e^n \int_0^n |f(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| \frac{e^n 2^{np} n^{(n+1)p}}{(p-1)!} \\ &= C \frac{a^{p-1}}{(p-1)!}, \end{aligned}$$

en donde  $a = 2^n n^{n+1}$  y  $C = (2e)^n n^{n+1} \sum_{k=1}^n |a_k|$  no dependen de  $p$ . Finalmente, como hay una infinidad de números primos y el término general de la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k/k!$  tiende a cero, existe  $p > \{n, |a_0|\}$  tal que  $C a^{p-1}/(p-1)! < 1/2$ . Esto demuestra (2) y por lo tanto  $e$  es trascendente.  $\square$

Aunque técnicamente más elaborada, la demostración de la trascendencia de  $\pi$  es similar a la de  $e$ . La trascendencia de  $\pi$  fue demostrada en 1882 por F. Lindeman y con ese resultado demostró que la cuadratura del círculo es imposible; es decir, no se puede dibujar con regla y compás un cuadrado de área igual a la del círculo de radio 1. En la siguiente demostración seguimos a Baker [4].

**Teorema 5.3.6.** *El número  $\pi$  de Arquímedes es trascendente.*

*Demostración.* Observe primero que si

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

entonces al substituir  $x = -iy$  se obtiene

$$(a_n y^n - a_{n-2} y^{n-2} + \cdots) + i(a_{n-1} y^{n-1} - a_{n-3} y^{n-3} + \cdots) = 0,$$

de donde se deduce que  $y = ix$  satisface

$$(a_n y^n - a_{n-2} y^{n-2} + \cdots)^2 + (a_{n-1} y^{n-1} - a_{n-3} y^{n-3} + \cdots)^2 = 0.$$

Por lo tanto  $\pi$  es algebraico si y sólo si  $i\pi$  lo es. Supongamos que  $i\pi$  es algebraico y que es raíz de la ecuación algebraica

$$ax^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a \neq 0.$$

Si  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$  son las raíces de esta ecuación, entonces  $\theta_j = i\pi$ , para algún  $j$ , y por la fórmula (29) de Euler

$$(e^{\theta_1} + 1) \cdots (e^{\theta_d} + 1) = 0.$$

Al efectuar el producto del lado izquierdo de esta identidad se obtiene

$$\sum_{\Theta} e^{\Theta} = 0,$$

en donde  $\Theta$  recorre los  $2^d$  términos de la forma

$$\Theta = \epsilon_1 \theta_1 + \cdots + \epsilon_d \theta_d, \quad \epsilon_j = 0, 1; j = 1, \dots, d.$$

Note que algunos, pero no todos los números  $\Theta$  son cero, pues se tendría  $2^d = 0$ . Luego, si los  $\Theta \neq 0$  se representan por  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , entonces

$$q + e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_n} = 0, \quad (43)$$

con  $q = 2^d - n > 0$ . Consideremos ahora el polinomio

$$F(z) = f(z) + f^{(1)}(z) + f^{(2)}(z) + \cdots + f^{((n+1)p-1)}(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

en donde  $f(z)$  se define como

$$f(z) = \frac{a^{np}}{(p-1)!} z^{p-1} (z - \alpha_1)^p \cdots (z - \alpha_n)^p, \quad (44)$$

con  $p$  un número primo que al final de la demostración será elegido suficientemente grande. Como  $f^{((n+1)p)} \equiv 0$ , se verifica fácilmente que

$$(e^{-z} F(z))' = -e^{-z} f(z)$$

y al integrar sobre el segmento de recta que une a 0 con  $z$  se deduce

$$F(0)e^z - F(z) = e^z \int_0^z e^{-t} f(t) dt. \quad (45)$$

Si evaluamos (45) en  $z = \alpha_k$  y luego sumamos sobre  $k$  encontramos

$$F(0) \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^n F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} e^{-t} f(t) dt,$$

de donde, al usar (43) resulta

$$-qF(0) - \sum_{k=1}^n F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} e^{-t} f(t) dt. \quad (46)$$

Recordemos ahora que si  $g(x_1, \dots, x_n)$  es un polinomio simétrico con coeficientes enteros, entonces existe un polinomio  $G(s_1, \dots, s_n)$  con coeficientes enteros tal

que  $g(x_1, \dots, x_n) = G(s_1, \dots, s_n)$ , en donde  $s_1 = x_1 + \dots + x_n$ ,  $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ ,  $\dots$ ,  $s_n = x_1x_2 \dots x_n$  [20].

Por otro lado, como en la demostración del Teorema 5.3.5 se obtienen fórmulas análogas a (41) y (42) y al hacer  $z = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  en las funciones  $g(z)$  y sus derivadas que allí aparecen, se obtiene que la suma sobre  $k$  en el lado izquierdo de (46), es un polinomio simétrico en  $a\alpha_1, \dots, a\alpha_n$  con coeficientes enteros y por lo tanto también simétrico en todos los  $2^d$  números  $a\Theta$ . Aplicando la observación precedente y las relaciones de Viète a esos polinomios simétricos se concluye que  $F(0)$  y  $\sum_{k=1}^n F(\alpha_k)$  son números enteros. Además, por las fórmulas análogas a (41) y (42) se sigue que este último es divisible por  $p$ .

Ahora demostraremos que si  $p$  es muy grande, entonces  $qF(0)$  no es divisible por  $p$  y por lo tanto el lado izquierdo de (46) será un entero distinto de cero. Ya que  $p$  divide a  $f^{(r)}(0)$ , excepto posiblemente a  $f^{(p-1)}(0) = (-a)^{np}(\alpha_1 \dots \alpha_n)^p$ . Se sigue que  $F(0) - f^{(p-1)}(0)$  es divisible por  $p$  y si  $p > \max\{a, q, |a^n \alpha_1 \dots \alpha_n|\}$ , entonces  $f^{(p-1)}(0)$  no lo es, ya que  $|a\alpha_1 \dots \alpha_n| > 0$ . Luego,  $F(0)$  no es divisible por  $p$  y como  $q > 0$ , tampoco lo es  $qF(0)$ .

Por otra parte, si  $\alpha = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\}$ , entonces para  $t$  en el segmento que une a 0 con  $\alpha_k$  se tiene

$$|f(t)| \leq \frac{a^{np}}{(p-1)!} |t|^{p-1} \prod_{i=1}^n (|t| + |\alpha_i|)^p \leq \frac{a^{np}}{(p-1)!} \alpha^{p-1} (2\alpha)^{np}.$$

Por lo tanto,

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} e^{-t} f(t) dt \right| \leq \frac{a^{np}}{(p-1)!} n e^{\alpha} \alpha^p (2\alpha)^{np} = C \frac{\ell^{p-1}}{(p-1)!},$$

donde  $C = 2^n n e^{\alpha} a^n \alpha^{n+1}$  y  $\ell = 2^n a^n \alpha^{n+1}$  que son independientes de  $p$ . Esto no es posible pues el lado derecho de la desigualdad precedente es menor que  $1/2$  si  $p$  es suficientemente grande. Por lo tanto  $\pi$  es trascendente.  $\square$

Para concluir esta sección establecemos la trascendencia de  $\zeta(2k)$ .

**Teorema 5.3.7.** *Para todo  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\zeta(2k)$  es trascendente.*

*Demostración.* En vista de que los múltiplos racionales y las potencias enteras positivas de números trascendentes son asimismo números trascendentes, por el Teorema 5.3.6, es suficiente demostrar que la fórmula (7) es correcta y que los números de Bernoulli son racionales. Desarrollaremos este plan, usando conceptos básicos de series de Fourier, como se sugiere en [24].

Consideremos los *polinomios de Bernoulli*  $B_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , definidos como los coeficientes de la expansión en serie de potencias en  $t$  de

$$e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n. \quad (47)$$

Note que para  $x = 0$  se obtiene (8) y por lo tanto los números de Bernoulli se recuperan al evaluar los polinomios de Bernoulli en  $x = 0$ , es decir,  $B_n = B_n(0)$ ; además, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n + \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \left( \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right)$$

es una función par, se sigue que  $B_1 = -1/2$  y  $B_{2n+1} = 0$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Más aún, de la expansión

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{t}{e^t - 1} \frac{e^t - 1}{t} \\ &= \left( B_0 + B_1 t + \frac{B_2 t^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n \right] \frac{t^n}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

se deduce que  $B_0 = 1$ , así como la relación de recurrencia

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \dots + \binom{n+1}{n} B_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (48)$$

la cual proporciona inductivamente todos los valores de  $B_n$  e implica que todos estos números son racionales.

Por otra parte, al realizar el producto de las series en (47) obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \left( 1 + xt + \frac{(xt)^2}{2!} + \dots \right) \left( B_0 + B_1 t + B_2 \frac{t^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \binom{n}{0} B_0 x^n + \binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} B_n \right] \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$B_n(x) = \binom{n}{0} B_0 x^n + \binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} B_n. \quad (49)$$



Luego, evaluando (49) en  $x = 1$  se obtiene  $B_1(1) = 1/2$  y usando (48) con  $n$  en lugar de  $n + 1$  se obtiene, para  $n \geq 2$ ,

$$B_n(1) = \binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n}B_n = B_n(0) = B_n. \quad (50)$$

Derivando (49) se verifica fácilmente que  $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$ , de donde, al integrar de 0 a  $x$ , resulta

$$B_{n+1}(x) = B_{n+1} + (n+1) \int_0^x B_n(t)dt.$$

Al hacer  $x = 1$  en esta última relación y usar (50) se obtiene, para  $n \geq 1$ ,

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0. \quad (51)$$

Supongamos ahora que  $B_{2n}(x)$ ,  $n \geq 1$ , tiene la expansión en serie de Fourier

$$B_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2n,k} \cos k\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (52)$$

Multiplicando ambos lados de (52) por  $\cos n\pi x$  e integrando de 0 a 1 se tiene  $A_{2n,0} = \int_0^1 B_{2n}(x)dx = 0$ , en virtud de (51), y para  $k \geq 1$

$$A_{2n,k} = 2 \int_0^1 B_{2n}(x) \cos k\pi x dx. \quad (53)$$

Integrando dos veces por partes el lado derecho de (53) obtenemos la relación de recurrencia

$$A_{2n,k} = 2 \frac{2n}{(k\pi)^2} \left[ (-1)^k B_{2n-1}(1) - B_{2n-1}(0) - (2n-1) \frac{A_{2n-2,k}}{2} \right].$$

Reiterando esta última relación se obtiene  $A_{2n,k} = 0$  para  $k$  impar y

$$A_{2n,2k} = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2k\pi)^{2n}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

que al sustituirla en (52) produce

$$B_{2n}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi x}{k^{2n}}. \quad (54)$$

Como la extensión periódica de  $B_{2n}(x)$  es continua y suave por tramos, ya que por (50)  $B_{2n}(0) = B_{2n}(1)$ , se sigue que la serie de Fourier (54) converge puntualmente a  $B_{2n}(x)$  [24]. Al evaluar esta serie en  $x = 0$  se obtiene (7) y en consecuencia, por la racionalidad de  $B_n$  (48), la trascendencia de  $\zeta(2n)$ .  $\square$

## 5.4. Irracionalidad, un método reciente

Demostraremos una vez más el carácter irracional de  $\zeta(2) = \pi^2/6$  porque, aunque no lo hacemos aquí, el método utilizado también se aplica para demostrar la irracionalidad de la constante  $\zeta(3)$  de Apéry [16] y se sospecha que también podría servir para probar la irracionalidad de la constante  $\gamma$  de Euler [26]. Este método ha sido desarrollado en [1, 5, 16] y se basa esencialmente en una representación integral adecuada de  $\zeta(2)$ . Por otra parte, nos parece interesante señalar que en esta demostración aparece la razón áurea y que, al requerir el uso del Teorema de los Números Primos, se establece un vínculo más entre  $\zeta(n)$  y los números primos.

El material de esta sección sigue de cerca a Huylebrouck [16]. Primeramente tenemos la siguiente representación integral de  $\zeta(2)$ .

**Proposición 5.4.1.**

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \zeta(2) \quad (55)$$

*Demostración.* Usando la expansión en serie geométrica de  $1/(1-xy)$  se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} x^j y^j dx dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 x^j dx \int_0^1 y^j dy \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \zeta(2). \end{aligned}$$

□

Enseguida recuperamos el resultado de Euler (6), evaluando la integral en (55).

**Proposición 5.4.2. (Euler)**

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

*Demostración.* Note primero que, con el cambio de variables  $(u, v) = (x^2, y^2)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{1-xy} - \frac{1}{1+xy} \right) dx dy &= 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy}{1-x^2 y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{du dv}{1-uv}. \end{aligned}$$

Además,

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1+xy} \right) dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^2y^2}.$$

Sumando estas dos últimas identidades resulta

$$2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dudv}{1-uv} + 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^2y^2}.$$

Equivalentemente, por (55),

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-x^2y^2}.$$

Luego, haciendo el cambio de variables  $(x, y) = (\sin \theta / \cos \phi, \sin \phi / \cos \theta)$ , cuyo jacobiano es  $1 - \tan^2 \theta \tan^2 \phi$  se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2-\theta} \frac{1 - \tan^2 \theta \tan^2 \phi}{1 - \left( \frac{\sin \theta}{\cos \phi} \right)^2 \left( \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \right)^2} d\phi \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2-\theta} d\phi \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

Ahora presentamos una estimación que nos permitirá utilizar el Teorema de los Números Primos para establecer la irracionalidad de  $\zeta(2)$ .

**Proposición 5.4.3.** Si  $d_n = [1, 2, \dots, n]$  es el mínimo común múltiplo de  $1, 2, \dots, n$ , entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$e^{(1-\epsilon)n} \leq d_n \leq e^{(1+\epsilon)n} \quad (56)$$

para todo  $n \geq N$ .

*Demostración.* Se verifica directamente que  $\log d_n = \psi(n)$ , en donde  $\psi(n)$  es la función de Tchevyshev definida en (21). Luego, por el teorema 5.2.3 y el teorema de los números primos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \log n}{n} = 1.$$

Es decir, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$1 - \epsilon \leq \frac{\log d_n}{n} \leq 1 + \epsilon$$

para todo  $n \geq N$  y por lo tanto (56) se cumple. □

Finalmente presentamos la tercera demostración de la irracionalidad de  $\zeta(2)$ .

**Teorema 5.4.4.**  $\zeta(2)$  es irracional.

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $d_n$  como en la Proposición 5.4.3 y sea

$$I_n = \int_0^1 P_n(x) f(x) dx, \quad (57)$$

en donde  $P_n$  es el polinomio definido como

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n (1-x)^n) = \sum_{j=0}^n p_{nj} x^j,$$

con  $p_{nj} \in \mathbb{Z}$ , y

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy} dy.$$

Suponiedo que  $\zeta(2) = a/b$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$  demostraremos que

1.  $bd_{n+1}^2 I_n \in \mathbb{Z}$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $0 < bd_{n+1}^2 I_n < 1$ , si  $n$  es suficientemente grande.

Como esto es imposible, concluiremos que  $\zeta(2)$  es irracional.

Para demostrar (1) notemos primero que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \sum_{j=0}^n p_{nj} x^j \left( \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy} dy \right) dx \\ &= \sum_{j,k=0}^n p_{nj} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^j y^k}{1-xy} dx dy. \end{aligned} \quad (58)$$

Utilizando reiteradamente la identidad  $x^j y^k = x^{j-1} y^{k-1} - (x^{j-1} y^{k-1})(1-xy)$ , se verifica fácilmente que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^k y^k}{1-xy} dx dy = \zeta(2) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

en donde  $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}$  se interpreta como 0 si  $k = 0$ , y que cada una de las integrales en el lado derecho de (58) con  $j \neq k$  es una suma de integrales de la forma

$$\int_0^1 \int_0^1 x^r y^s dx dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^r}{1-xy} dy dx, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^s}{1-xy} dy dx.$$

Todas estas integrales se pueden calcular directamente y producen números racionales cuyo denominador común es  $d_{n+1}^2$ . Por lo tanto

$$I_n = A_n \zeta(2) + \frac{B_n}{d_{n+1}^2}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{Z}.$$

Luego si  $\zeta(2) = a/b$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces  $bd_{n+1}^2 I_n \in \mathbb{Z}$ . Esto demuestra (1).

Para demostrar (2) primero integramos (57)  $n$  veces por partes. Usando el hecho de que  $P_n(0) = P_n(1) = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n(x) f(x) dx &= \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x^n (1-x)^n \left( \int_0^1 \frac{y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dy dx. \end{aligned} \quad (59)$$

Como el lado derecho de (59) es positivo, también lo es  $I_n$ . Además, se verifica fácilmente que el máximo en  $[0, 1]^2$  de la función

$$\phi(x, y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$$

se alcanza en  $x = y = 1/\tau$  y es igual a  $1/\tau^5$ , en donde  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$  es la razón áurea. Insertando esta estimación en (59) y haciendo uso de (55) y (56) se concluye que

$$0 < bd_{n+1}^2 I_n \leq b3^{2(n+1)} \frac{\zeta(2)}{\tau^{5n}} = 9b\zeta(2) \left( \frac{9}{\tau^5} \right)^n < 1$$

si  $n$  es suficientemente grande. Esto demuestra (2) y por lo tanto  $\zeta(2)$  es irracional.  $\square$

La irracionalidad de  $\zeta(3)$  se puede establecer de manera enteramente similar [16] y no la incluimos aquí por limitaciones de espacio, pero nos parece interesante presentar la siguiente representación integral que juega un papel crucial en la demostración de la irracionalidad de este número.

**Proposición 5.4.5.**

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dx dy = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \zeta(3).$$

*Demostración.* Expandiendo  $1/(1 - xy)$  en serie geométrica, por simetría se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1 - xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 (\log x + \log y) \sum_{j=0}^{\infty} x^j y^j dx dy \\
 &= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 x^j dx \int_0^1 y^j \log y dy \\
 &= -2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^3} = -2\zeta(3)
 \end{aligned}$$

□

Concluimos esta sección con una representación integral para la constante  $\gamma$  de Euler, análoga a las de  $\zeta(2)$  y  $\zeta(3)$ , descubierta recientemente por Sondow [25], la cual se cree que podría ser útil para decidir el carácter aritmético de  $\gamma$ .

**Proposición 5.4.6.**

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy) \log xy} dx dy. \quad (60)$$

*Demostración.* Note que si  $0 < xy < 1$ , entonces para  $j = 0, 1, 2, \dots$  se tiene

$$\int_j^{\infty} (xy)^t dt = \left[ \frac{(xy)^t}{\log xy} \right]_j^{\infty} = -\frac{(xy)^j}{\log xy}.$$

Luego, expandiendo  $1/(1 - xy)$  en serie geométrica, utilizando la última identidad y

realizando las integrales obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\log xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{\log xy} \sum_{j=0}^{\infty} (xy)^j dx dy \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (1-x) \left( -\frac{(xy)^j}{\log xy} \right) dx dy \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (1-x) \int_j^{\infty} (xy)^t dt dx dy \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (x^t - x^{t+1}) y^t dx dy dt \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{j+1} - \log \frac{j+2}{j+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n} - \log n - \log \frac{n+1}{n} \right) \\
 &= \gamma.
 \end{aligned}$$

□

**Agradecimientos.** Los autores agradecen al Dr. Felipe Monroy Pérez, Profesor Investigador del Área de Análisis Matemático de la UAM-A, su cordial invitación para participar en este proyecto y al Sr. Iván Téllez Téllez, estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UAEH, por sus valiosas observaciones sobre una versión preliminar de este trabajo.





# Bibliografía

- [1] APÉRY, R., Irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$ , *Astérisque*, **61** (1979), 12–14.
- [2] APOSTOL, T., *Introduction to Analytic Number Theory*, UTM, Springer Verlag, 1995.
- [3] AYOUB, R., Euler and the Zeta Function, *Amer Math. Monthly*, **81** (1974), 1067–1086.
- [4] BAKER, A., *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1979.
- [5] BEUKERS, F., A Note on the Irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$ , *Bull. London Math. Society*, **11** (1979), 268–272.
- [6] BALL, K. RIVOAL, T., Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs, *Invent. Math.*, **146**, 193–207, (2001).
- [7] BOYER, C., *A History of Mathematics*, Wiley International Editon, 1968.
- [8] DAVENPORT, H., *Multiplicative Number Theory*, GTM, Springer Verlag, 2000.
- [9] DEVLIN, K., *The Millenium Problems*, Basic Books, 2002.
- [10] DUNHAM, W., *Euler, The Master of Us All*, MAA, The Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, 1999.
- [11] EDWARDS, C. H., *Riemann’s Zeta Function*, Dover, 2001.
- [12] EDWARDS, C. H., *The Historical Development of Calculus*, Springer Verlag, 1980.
- [13] GOLDSTEIN, L. J., A History of the Prime Number Theorem, *Amer Math. Monthly*, **80** (1973), 599–614.
- [14] HARDY, G. H. Y WRIGHT, E. M., *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, 1998.

- [15] HAVIL, J., *Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, 2003.
- [16] HUYLEBROUCK D., Similarities in Irrationality Proofs for  $\pi$ ,  $\ln 2$ ,  $\zeta(2)$ , and  $\zeta(3)$ , *Amer. Math. Monthly*, **108**, 222–231, 2001.
- [17] INGHAM, A. E., *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge University Press, 1990.
- [18] NEWMAN, D. J., *Analytic Number Theory*, Springer Verlag, 1991.
- [19] NIVEN, I., A Simple Proof that  $\pi$  is Irrational, *Bull. Amer. Math. Society*, **53**, 1947, 509.
- [20] POLLARD, H. Y DIAMOND, H. G., *The Theory of Algebraic Numbers*, The Carus Mathematical Monographs, 1975.
- [21] SANDIFER, E. C., *The Early Mathematics of Leonhard Euler*, The MAA Tercentenary Euler Celebration, 2007.
- [22] SELBERG, A., An Elementary Proof of the Prime Number Theorem, *Ann. of Math.*, (2) **50**, 1949, 305–313.
- [23] SERRE, J. P., *A Course in Arithmetic*, Springer Verlag, 1973.
- [24] SIMMONS, G. F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw Hill, 1991.
- [25] SONDOW J., A Geometric Proof that  $e$  is Irrational and a New Measure of its Irrationality, *Amer. Math. Monthly*, **113**, 2006, 637–641.
- [26] SONDOW J., Criteria for Irrationality of Euler's Constant, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 11, 3335–3344.
- [27] TICHMARSH, E. C., *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, London and New York, 1951.
- [28] VON KOCH H., Sur la distribution des nombres premières, *Acta Math.* **24** (1901), 159–182.
- [29] ZUDILIN, V., One of the numbers  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$ ,  $\zeta(11)$  is irrational, *Russian Mathematical Surveys*, **56:4**, 774–776, 2001.

## Capítulo 6

# Euler y la teoría de números

V. Janitzio Mejía Huguet <sup>1</sup> y Arturo Cueto Hernández <sup>2</sup>

*“Los matemáticos han tratado en vano hasta este día de descubrir alguna regla en la sucesión de los números primos, y creemos que este es un misterio en el cual la mente humana nunca penetrará.”*

*Leonhard Euler*

### 6.1. Introducción

En este capítulo presentaremos algunas de las contribuciones de Euler a la teoría de números.

El gran interés de Euler por la teoría de los números fue en gran parte alimentado por Christian Goldbach a quien fascinaban los números. Ellos mantenían una comunicación constante y fué Goldbach quien llamó la atención de Euler sobre muchas de las proposiciones no probadas de Fermat. Aunque en principio Euler no sentía mucho entusiasmo por la materia, su insaciable curiosidad y la persistencia de Goldbach pronto lo hicieron cambiar de opinión y quedó cautivado por la teoría de números en general y la lista de proposiciones de Fermat en particular. Como observó Andre Weil, *“... una parte sustancial del trabajo de Euler (en teoría de números) consiste ni más ni menos que en obtener demostraciones a proposiciones de Fermat.*

Uno de los trabajos principales de Euler estableció una relación entre la naturaleza de la distribución de los números primos con las ideas del análisis. Él demostró que

---

<sup>1</sup>Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, [jmh@correo.azc.uam.mx](mailto:jmh@correo.azc.uam.mx)

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, [arch@correo.azc.uam.mx](mailto:arch@correo.azc.uam.mx)

*la suma de los recíprocos de los primos diverge*. Al hacer esto, descubrió la relación entre la función zeta de Riemann y los números primos, ésta es conocida como *la fórmula del producto de Euler para la función zeta de Riemann*.

Euler demostró algunas identidades de Newton, el *Pequeño Teorema de Fermat*, el *Teorema de Fermat de sumas de dos cuadrados*, e hizo contribuciones para el Teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange. Inventó la función totient  $\phi(n)$ , conocida hoy como la función  $\phi$  de Euler, que asigna a un número entero positivo  $n$  el número de enteros positivos menores que  $n$  que son primos relativos a  $n$ . Utilizando las propiedades de esta función fue capaz de generalizar el Pequeño Teorema de Fermat, lo que hoy conocemos como el *Teorema de Euler–Fermat*. También contribuyó considerablemente al entendimiento de los *números perfectos*, que habían fascinado a matemáticos desde Euclides. Euler realizó trabajos relacionados con lo que hoy se conoce como *Teorema de los números primos* y conjeturó la *Ley de la reciprocidad cuadrática*. Los dos conceptos son considerados como los teoremas fundamentales de la teoría de números moderna, y sus ideas prepararon el terreno para el trabajo de Carl Friedrich Gauss [8].

Por 1772 Euler había demostrado que  $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$  es un *primo de Mersenne*. Éste fue el primo de Mersenne más grande conocido hasta 1867.

Euler (1707–1783), el más prolífico de los matemáticos cuenta en sus investigaciones con cuatro volúmenes de su *Opera Omnia* dedicados a la teoría de los números.

*“sólo sus contribuciones a la teoría de números  
bastarían para establecer una reputación  
trascendente en los anales de matemáticas”*

Harold M. Edwards [20, p 39]

## 6.2. La teoría de números antes de Euler

El hombre desde la antigüedad ha tenido especial interés en los números; la teoría de números se encarga de estudiar las propiedades de estos, así podríamos afirmar que la teoría de números es tan antigua como el hombre mismo. Las civilizaciones más antiguas, China, Babilónica y Egipcia, han dejado constancia de este interés en sus tablillas y papiros. En particular, en la civilización Griega, como ejemplo, tenemos los trabajos de la escuela Pitagórica (siglo VI a.c.) donde consideraban que los números enteros eran más que abstracciones matemáticas y les atribuían cierto misticismo, eran objeto de reverencia y contemplación; ellos realizaron estudios acerca de los números perfectos y poligonales o figurados entre otros. Euclides (325–265) en sus *Elementos* le dedica tres de sus trece libros al estudio de la teoría de los números, esto nos habla ya de la importancia que esta rama de las matemáticas tenía para los griegos. Aunque la obra de Euclides se ha considerado como un tratado de geometría, ésta contiene

teoría de números significativa, donde los números están representados por segmentos de líneas y tienen una apariencia geométrica. Por ejemplo, la proposición 36 del libro IX de los *Elementos* que dice:

*Si colocamos los números que queramos comenzando desde una unidad en proporción doble de forma continuada, hasta que su suma se convierta en un primo, y si esa suma es multiplicada por el número final, el producto será perfecto.*

Aquí “proporción doble” significa que cada número de la secuencia es dos veces el número precedente.

Euclides nos proporciona una prueba rigurosa de la Proposición, dando el primer resultado significativo acerca de los números perfectos. Usando el hecho, conocido por los Pitagóricos, de que

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

Podemos enunciar la Proposición en un lenguaje más moderno de la siguiente forma:

*Si, para algún  $k > 1$ ,  $2^k - 1$  es primo entonces  $2^{k-1}(2^k - 1)$  es un número perfecto.*

Trabajos posteriores como el de Nicómaco de Gerasa (60–120), quien en su obra *Introductio Arithmetica* proporciona una clasificación de los números basada en el concepto de número perfecto. Nicómaco divide los números en tres clases, los números superabundantes o “demasiado grandes”, que poseen la propiedad de que la suma de sus partes divisibles es mayor que el propio número; los números deficientes o “demasiado pequeños”, que tienen la propiedad de que la suma de sus partes divisibles es menor que el número; y los perfectos, que tienen la propiedad de que la suma de sus partes divisibles es igual al número.

Nicómaco enuncia ciertos resultados que involucran a los números perfectos. Todos ellos se proporcionan sin ninguna prueba. Estos en un lenguaje moderno se enuncian de la siguiente forma:

- (1) El  $n$ -ésimo número perfecto posee  $n$  dígitos.
- (2) Todos los números perfectos son pares.
- (3) Todos los números perfectos terminan de forma alternada en 6 y 8.
- (4) El algoritmo de Euclides para generar números perfectos proporcionará todos ellos, i.e., cada número perfecto es de la forma  $2^{k-1}(2^k - 1)$ , para algunos  $k > 1$ , donde  $2^k - 1$  es primo.
- (5) Hay infinitos números perfectos.

Las afirmaciones (1) y (3) son falsas, como veremos mas adelante, mientras que el resto todavía son preguntas abiertas. Desde la época de Nicómaco se sabía más sobre las cinco afirmaciones. Veamos, por ejemplo, la descripción de Nicómaco del algoritmo para generar números perfectos, su cuarta afirmación:

*Existe un método elegante y seguro para generar estos números, que no deja afuera ninguno de los números perfectos y no incluye los que no lo son; y que se hace de la forma siguiente. Primero se colocan en orden las potencias de dos en una línea, comenzando desde la unidad hasta el número que se desee: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096; y entonces se suman cada vez que haya un nuevo término, y en cada suma se examina el resultado; si encuentras que es primo y no compuesto, debes multiplicarlo por la cantidad del último término que añadiste a la lista, y el producto siempre será perfecto. Si, de algún modo, es compuesto y no primo, no lo multipliques, sino que debes añadirlo al siguiente término, y de nuevo examinar el resultado, si es compuesto déjalo de lado, sin multiplicarlo, y súmalo al término siguiente. Si, por otra parte, es primo, y no compuesto, debes multiplicarlo por el último término tomado de su composición, y el número resultante será perfecto, y así hasta el infinito.*

Este algoritmo es precisamente el que nos da Euclides en los *Elementos*. Sin embargo, es probable que este método de generar números perfectos sea parte de una tradición matemática manejada con anterioridad a Euclides y continuada hasta la época en que Nicómaco escribió su tratado. Si las cinco afirmaciones de Nicómaco se basaron en algo más que en el algoritmo y el hecho de que sólo conociera cuatro números perfectos 6, 28, 496 y 8128, es imposible de decir, pero parece improbable que haya algo más detrás de las afirmaciones sin demostrar. A pesar de que Nicómaco no ofreció ninguna justificación a sus afirmaciones, fueron tomadas como verdaderas durante muchos años.

Diofanto de Alejandría (200–284) nos ha legado sus obras *Porismata*, ésta consistente en un conjunto de lemas, por ejemplo:

*La diferencia de los cubos de dos números racionales es igual a la suma de los cubos de otros dos números racionales.*

y *Arithmetica* que desde su redescubrimiento y traducción en el Renacimiento ha sido de gran influencia en la teoría de los números. Además, de sus trabajos acerca de los números poligonales.

La contribución de la civilización árabe es sumamente importante, no únicamente por haber preservado el conocimiento de las civilizaciones que la antecedieron sino también por las contribuciones hechas, aunque muchas de éstas no se hayan reconocido en su momento. No es de extrañar que los matemáticos árabes también estuvieran

fascinados por los números perfectos, esto puede explicarse por la influencia de los matemáticos griegos que los antecedieron.

Entre los matemáticos árabes que trabajaron en estos temas está Thabit ibn Qurra (836–901), quien escribió un tratado sobre los números amigables en el cual examinaba cuándo los números de la forma  $2np$ , donde  $p$  es primo, pueden ser perfectos. Dentro del legado de la civilización árabe está el trabajo de Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham (965–1040), Rashed [30], [31] o [32] afirma que al-Haytham fue el primero en enunciar y demostrar el recíproco a la proposición euclidiana acerca de los números perfectos en el trabajo sin publicar *Tratado sobre el análisis y la síntesis* en el que mostró que los números perfectos que satisficieran ciertas condiciones tenían que ser de la forma  $2^{k-1}(2^k - 1)$  donde  $2^k - 1$  es primo. Por último citaremos el trabajo acerca de los números perfectos de Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus (1194–1239), quien escribió un tratado basado en la *Introducción a la aritmética* de Nicómaco. Aceptaba la clasificación de los números de Nicómaco, pero su trabajo es puramente matemático y no contiene los comentarios morales de su predecesor. Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus dio, en su tratado, una tabla de diez números que se suponían perfectos, los primeros siete son correctos y de hecho constituyen los siete primeros números perfectos, los tres restantes son incorrectos.

Alrededor del año 1500, cuando se daba el renacimiento de las matemáticas en Europa, las afirmaciones de Nicómaco eran tomadas como verdaderas, no se consideraron otros trabajos posteriores, ni siquiera los de los árabes. Algunos incluso creyeron los injustificados e incorrectos resultados de que  $2^{k-1}(2^k - 1)$  es un número perfecto para cada impar  $k$ . Luca Pacioli (1445–1517) parece haber creído firmemente en esta falacia. Charles de Bovelles (1475–1566), filósofo y teólogo, publicó un libro sobre los números perfectos en 1509. En él decía que la fórmula euclidiana  $2^{k-1}(2^k - 1)$  proporcionaba un número perfecto para todos los enteros impares  $k$ .

El quinto número perfecto sería redescubierto, ignorando los trabajos árabes, y aparecía en un manuscrito datado en 1461. También aparece en un manuscrito de Regiomontanus (1436–1476) durante su estancia en la universidad de Viena, que abandonó en 1461. Asimismo se encontró en un manuscrito escrito alrededor de 1458, mientras que los números perfectos quinto y sexto se encontraron en otro manuscrito probablemente por el mismo autor poco después de 1460. Todo lo que sabemos de él es que vivió en Florencia y fue un discípulo de Domenico d'Agostino Vaiaio.

En 1536, Hudalrichus Regius hizo la primera contribución significativa al conocimiento de los matemáticos que le seguirían. Esto sucedió cuando publicó *Utriusque Arithmetices* en el que daba la factorización  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ . Es decir, había encontrado el primer número primo  $p$  tal que  $2^{p-1}(2^p - 1)$  no es un número perfecto. También demostró que  $2^{13} - 1 = 8191$  es primo, por lo tanto descubrió y mostró el quinto número perfecto  $2^{12}(2^{13} - 1) = 33550336$ , sin tomar en cuenta el

trabajo de Fallus. Esto demostró que la primera afirmación de Nicómaco era falsa ya que el quinto número perfecto tenía 8 dígitos. Sin embargo se mantenía la afirmación de que los números perfectos terminaban en forma alternada en 6 o 8. Es sorprendente que Regius, que debe haber pensado que había hecho una contribución importante al saber matemático, es hoy en día virtualmente desconocido.

J. Scheybl (1494-1570) obtuvo el sexto número perfecto en 1555, el cual es  $2^{16} \times (2^{17} - 1) = 8589869056$  y lo anota en un comentario a la traducción de los *Elementos* de Euclides. No fue hasta 1977 que se conoció este hecho por lo que no tuvo ninguna influencia en el proceso para descubrir números perfectos.

El siguiente avance se dio en 1603 cuando Cataldi (1548–1626) escribió todos los factores de todos los números hasta 800 y una tabla de números primos entre 1 y 750, hay 132. Cataldi usó su lista de primos para demostrar que  $2^{17} - 1 = 131071$  es primo. De donde, Cataldi conoció el sexto número perfecto:  $2^{16}(2^{17} - 1) = 8589869056$ , hallado previamente por Scheybl. Este resultado de Cataldi demostró que la afirmación de Nicómaco de que los números perfectos terminan alternadamente en 6 y 8 era falsa ya que el quinto y el sexto número perfecto terminan ambos en 6. Cataldi usó su lista de números primos para comprobar que el número  $2^{19} - 1 = 524287$  era primo y de este modo encontró el séptimo número perfecto:  $2^{18}(2^{19} - 1) = 137438691328$ .

La historia de los números perfectos está plagada de errores y Cataldi, a pesar de haber descubierto dos números perfectos, también cometió errores. Escribió en *Utriusque Arithmetices* que los exponentes  $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31$  y 37 daban números perfectos  $2^{p-1}(2^p - 1)$ . Estuvo en lo correcto para  $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17$  y 19 para los que tenía una prueba en base a su tabla de números primos, pero sólo una de sus cuatro siguientes afirmaciones para 23, 29, 31 y 37 es correcta.

Muchos matemáticos estuvieron interesados en los números perfectos e intentaron contribuir a la teoría. Por ejemplo Descartes (1596–1650), en una carta a Mersenne (1588–1648) en 1638, escribió:

*... Creo que soy capaz de demostrar que no hay números pares perfectos aparte de los que descubrió Euclides; y que no hay números perfectos impares a menos que estén formados por un único número primo, multiplicado por el cuadrado cuya raíz esté compuesta de otro número primo. Pero no puedo ver nada que impida encontrar números de ese tipo. Por ejemplo, si 22021 fuera primo, al multiplicarlo por 9018009, que es el cuadrado cuya raíz se compone de los números primos 3, 7, 11, 13, encontraríamos 198585576189, que sería un número perfecto. Pero sea cual fuere el método empleado, llevaría un gran esfuerzo buscar estos números...*



La siguiente gran contribución fue hecha por Fermat (1601–1665). Le comentó a Roberval (1602–1675) en 1636 que estaba trabajando en el tema y que tenía la intención de publicar un tratado. En junio de 1640, Fermat escribió a Mersenne contándole sus descubrimientos en relación a los números perfectos. Escribía:

*... aquí hay tres proposiciones que he descubierto, sobre las que espero construir una enorme estructura. Los números mayores en uno que en la doble progresión, tales como*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191

*Llamémosles radicales de números perfectos, ya que cuando no son primos, los producen. Colocamos encima estos números en su progresión natural 1, 2, 3, 4, 5, etc., llamados sus exponentes. Tras hacerlo, yo digo*

- 1. Cuando el exponente de un número radical es compuesto, su radical es también compuesto. El 6, el exponente de 63, es compuesto, así que digo que el 63 será compuesto.*
- 2. Cuando el exponente es un número primo, afirmo que su radical menos uno es divisible por dos veces el exponente. El 7, el exponente de 127, es primo, así que digo que 126 es múltiplo de 14.*
- 3. Cuando el exponente es un número primo, afirmo que su radical no puede dividirse por ningún otro número primo excepto por aquellos que sean mayores por uno que un múltiplo que doble el exponente...*

*Aquí están tres hermosas proposiciones que he encontrado y demostrado sin dificultad, las llamaré los fundamentos de la invención de los números perfectos. No dudo que Frenicle de Bessy llegará allí antes, pero acabo de empezar y sin duda estas proposiciones pasarán como algo encantador en las mentes de aquellos que no se hayan vuelto lo suficientemente hipócritas en estos asuntos, y estaría muy feliz si consiguiera la opinión de M Roberval.*

Después de escribir esta carta a Mersenne, Fermat escribió a Frenicle de Bessy el 18 de octubre de 1640. En esta carta daba una generalización de los resultados de la carta anterior enunciando lo que ahora se conoce como el Pequeño Teorema de Fermat donde se afirma que para cualquier primo  $p$  y un entero  $a$  no divisible por  $p$ ,  $a^{p-1} - 1$ , es divisible por  $p$ . Fermat encontró su Pequeño Teorema como consecuencia directa de sus investigaciones en el campo de los números perfectos.

Utilizando casos especiales de su Pequeño Teorema, Fermat fue capaz de refutar dos de las afirmaciones de Cataldi en su carta de junio de 1640 a Mersenne. Demostró

que  $2^{23} - 1$  era compuesto,  $2^{23} - 1 = 47 \times 178481$ , y que  $2^{37} - 1$  era compuesto,  $2^{37} - 1 = 223 \times 616318177$ . Frenicle de Bessy había preguntado a Fermat aquel mismo año, en correspondencia a través de Mersenne, si existía un número perfecto entre  $10^{20}$  y  $10^{22}$ . De hecho, suponiendo que los números perfectos son de la forma  $2^{p-1}(2^p - 1)$  donde  $2^p - 1$  es primo, la pregunta se convierte en determinar si  $2^{37} - 1$  es primo. Fermat no sólo afirma que  $2^{37} - 1$  es compuesto en su carta de junio de 1640 sino que cuenta a Mersenne cómo lo ha factorizado.

Fermat usó tres teoremas:

- (i) Si  $n$  es compuesto, entonces  $2^n - 1$  es compuesto.
- (ii) Si  $n$  es primo, entonces  $2^n - 2$  es múltiplo de  $2n$ .
- (iii) Si  $n$  es primo y  $p$  es un divisor primo de  $2^n - 1$ , entonces  $p - 1$  es múltiplo de  $n$ .

Obsérvese que (i) es trivial pero (ii) y (iii) son casos especiales del Pequeño Teorema de Fermat. Fermat procedió como sigue: si  $p$  es un divisor primo de  $2^{37} - 1$ , entonces 37 divide a  $p - 1$ . Como  $p$  es impar, entonces es un primo de la forma  $2 \times 37m + 1$ , para algún  $m$ . El primer caso que se prueba es  $p = 149$  y no se tiene éxito, se comprueba con una división. El siguiente caso a probar es 223, que corresponde a  $m = 3$ , en el cual se tiene éxito y  $2^{37} - 1 = 223 \times 616318177$ .

Por otra parte, Fermat también estudió los números de la forma  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , hoy conocidos como números de Fermat, y conjeturó que  $F_n$  es primo para todo  $n$ .

Mersenne interesado en los resultados de Fermat sobre los números perfectos, realizó una afirmación que fascinaría a los matemáticos durante muchos años. En 1644 publicó *Cogitata physica mathematica* en el que afirmaba que  $2^p - 1$  es primo y por lo tanto  $2^{p-1}(2^p - 1)$  es un número perfecto, para

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

y para ningún otro valor de  $p$  superior a 257. Pero Mersenne no podía haber comprobado estos resultados y lo admite diciendo:

*... para decir que un número dado de 15 o 20 dígitos es primo, o no, haría falta todo el tiempo del mundo.*

El hecho importante es que Mersenne lo habría hecho bastante bien si esto hubiera sido algo más que adivinación. Hay 47 primos  $p$  mayores que 19 y menores que 258 para los cuales  $2^p - 1$  podría haber sido primo o compuesto. Mersenne consiguió

acertar en 42 de ellos, pero cometió 5 errores.

Los números primos de la forma  $2^p - 1$  se llaman primos de Mersenne.

Con esto concluimos esta sección, la exposición del estado de la teoría de números antes de Euler no es exhaustiva dada la cantidad de trabajos que en este campo ya existía; así, más bien nos hemos concentrado en aquellos tópicos que serían la fuente de inspiración para el trabajo de Euler.

### 6.3. Euler en la teoría de números

En esta sección presentaremos algunas de las contribuciones de Euler a la teoría de números. Iniciaremos ésta con los números perfectos y amigables.

#### 6.3.1. Números perfectos y amigables

Hoy en día la definición común de número perfecto se hace en términos de sus divisores, pero la definición original estaba hecha en términos de “partes divisibles” de un número.

**Definición 6.3.1.** *Una parte divisible de un número es un cociente propio del número.*

Por ejemplo las partes divisibles de 10 son 1, 2 y 5. Esto se debe a que  $1 = \frac{10}{10}$ ,  $2 = \frac{10}{5}$ , y  $5 = \frac{10}{2}$ . Obsérvese que 10 no es una parte divisible de 10 porque no es un cociente propio, i.e. un cociente diferente del propio número.

**Definición 6.3.2.** *Un número entero es perfecto si es igual a la suma de sus partes divisibles.*

**Ejemplo 6.3.3.** *Los primeros cuatro números perfectos: 6, 28, 496 y 8128 parecen haber sido conocidos desde los tiempos más antiguos a pesar de que no existe ninguna prueba de estos descubrimientos.*

Los primeros trabajos acerca de los números perfectos de los que se tiene conocimiento aparecen en los *Elementos* de Euclides, el libro VII inicia con 22 definiciones, en la última da la definición de número perfecto. Después de la definición, no vuelve a mencionar a los números perfectos sino hacia el final del libro IX en la proposición 36 que dice:

**Proposición 6.3.4.** *Si colocamos los números que queramos comenzando desde una unidad en proporción doble de forma continuada, hasta que su suma se convierta en un primo, y si esa suma es multiplicada por el número final, el producto será perfecto.*

**Ejemplo 6.3.5.** Para ilustrar esta Proposición consideremos  $1 + 2 + 4 = 7$  que es primo. Entonces

$$(la\ suma) \times (el\ último) = 7 \times 4 = 28,$$

que es un número perfecto. Como segundo ejemplo, tomemos  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$  que también es primo. Entonces  $31 \times 16 = 496$  es un número perfecto.

Usando el hecho:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

La Proposición se puede enunciar en la forma siguiente:

**Teorema 6.3.6. (Euclides)** Si, para algún  $k > 1$ ,  $2^k - 1$  es primo entonces  $2^{k-1}(2^k - 1)$  es un número perfecto.

Lo que Euclides empezó con este teorema había de esperar 20 siglos para que Euler probara la contraparte. Veamos cómo lo hizo.

Euler trata los números perfectos en un artículo acerca de los números amigables: “De numeris amicabilibus” [10, pp. 353-365].

**Definición 6.3.7.** Dos números  $m$  y  $n$  se dicen amigables si la suma de los divisores propios de  $m$  es  $n$  y viceversa.

Sobra decir que este tipo de pares de números son muy raros, los más pequeños son 220 y 284, fueron conocidos por los Pitagóricos y antes de Euler solamente se conocían tres pares:

220 y 284	Pitagóricos
17 296 y 18 416	Qurra y Fermat
9 363 584 y 9 437 056	Descartes

**Teorema 6.3.8. (Qurra)** Dos números  $N$  y  $M$  son amigables si se pueden descomponer en factores de la forma

$$N = 2pqr \text{ y } M = 2ps$$

siendo  $q$ ,  $r$  y  $s$  primos de la forma

$$q = 3(2^{p-1} - 1), \quad r = 3(2^p - 1) \text{ y } s = 9(2^{2p-1} - 1).$$

□

¡Euler encontró 59 pares adicionales! En el tratamiento que Euler hace de los números amigables y perfectos, introduce la siguiente definición que muestra ser de gran utilidad.

**Definición 6.3.9.**  $\sigma(n)$  es la suma de todos los divisores de  $n$ .

En su artículo Euler usa la notación  $\int n$ , con el paso del tiempo se cambió el símbolo  $\int$  por la letra griega “sigma”.

**Ejemplo 6.3.10.**  $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ .  $\sigma(7) = 1 + 7 = 8$ .

Así es claro que la suma de los divisores propios de  $n$  es  $\sigma(n) - n$ , y por lo tanto:

**Teorema 6.3.11.** Los números  $m$  y  $n$  son amigables si y sólo si satisfacen la relación  $\sigma(m) = m + n = \sigma(n)$ .

Para la función  $\sigma$  tenemos las siguientes propiedades que usaremos posteriormente:

1.  $p$  es primo si y sólo si  $\sigma(p) = p + 1$ .
2.  $N$  es perfecto si y sólo si  $\sigma(N) = 2N$ .
3. Si  $p$  es primo, entonces  $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$ .
4. Si  $p$  y  $q$  son primos diferentes, entonces  $\sigma(pq) = \sigma(p)\sigma(q)$ .

**Demostración:** Los divisores de  $pq$  son 1,  $p$ ,  $q$ ,  $pq$ , luego

$$\begin{aligned}\sigma(pq) &= 1 + p + q + pq = (1 + p) + q(1 + p) \\ &= (1 + p)(1 + q) \\ &= \sigma(p)\sigma(q).\end{aligned}$$

□

5. Si  $a$  y  $b$  son primos relativos, entonces  $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ .

**Ejemplo 6.3.12.**  $\sigma(2^k) = 2^{k+1} - 1 = 2(2^k) - 1$ , es decir que las potencias de 2 jamás son números perfectos.

Con estas observaciones en mente, veamos cómo Euler probó la suficiencia del teorema de Euclides y que nos permite admirar la genial simplicidad del genio de Euler:

**Teorema 6.3.13.** Si  $N$  es un número perfecto par, entonces  $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ , donde  $2^k - 1$  es un número primo.

**Demostración:** Dado que  $N$  es par, lo podemos escribir como  $N = 2^{k-1}a$  con  $a$  impar y  $k > 1$ . Como  $N$  es un número perfecto, satisface que

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^{k-1}a) = 2^k a.$$

Puesto que  $2^{k-1}$  y  $a$  son primos relativos, se tiene que:

$$\sigma(N) = \sigma(2^{k-1})\sigma(a) = (2^k - 1)\sigma(a).$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para  $\sigma(N)$ :

$$2^k a = (2^k - 1)\sigma(a).$$

Por lo tanto,  $(2^k - 1)|2^k a$  lo cual implica que  $(2^k - 1)|a$ . Sea  $a = (2^k - 1)M$ , observemos que  $1 \leq M < a$ . De la igualdad anterior, tenemos

$$2^k a = (2^k - 1)\sigma(a),$$

$$2^k (2^k - 1)M = (2^k - 1)\sigma(a),$$

$$2^k M = \sigma(a).$$

Como  $a|a$  y  $M|a$ , tenemos que

$$2^k M = \sigma(a) \geq a + M = 2^k M,$$

lo cual implica que  $\sigma(a) = a + M$ . Por lo tanto,  $a$  tiene sólo dos divisores,  $a$  y  $M$ . Así,  $a$  debe ser primo,  $M = 1$ , y  $a = (2^k - 1)$ . Por lo tanto,

$$N = 2^{k-1}a = 2^{k-1}(2^k - 1),$$

donde  $(2^k - 1)$  es un número primo. □

**Nota 6.3.14.** *Se conocen ahora demostraciones más simples de este hecho. Una variación de la aquí presentada es debida a L. E. Dickson y se puede ver en [35, p 8].*

Con este Teorema se verifica la cuarta afirmación de Nicómaco al menos en el caso de los números pares. Esto también da una sencilla prueba de que todos los números perfectos pares terminan en 6 y 8, pero no de forma alternada.

Euler intentó avanzar en el problema de la existencia de los números perfectos impares. Fue capaz de demostrar la afirmación hecha por Descartes en su carta a Mersenne en 1638 que hemos citado anteriormente, fue un poco más allá y demostró que cualquier número perfecto impar tenía que tener la forma

$$(4n + 1)^{4k+1}b^2$$

Donde  $4n + 1$  es primo. Asimismo, junto con los otros cuyas contribuciones hemos examinado, Euler hizo predicciones sobre los números perfectos que resultaron equivocadas. Afirmó que  $2^{p-1}(2^p - 1)$  era un número perfecto para  $p = 41$  y  $p = 47$ , Euler encontró su propio error y lo corrigió en 1753.

La búsqueda de los números perfectos se había convertido en un intento de comprobar si Mersenne tenía razón en sus afirmaciones en *Cogitata physica mathematica*.

De hecho los resultados de Euler habían hecho creer a mucha gente que Mersenne tenía un método secreto que le habría dado la respuesta correcta. El número perfecto de Euler  $2^{30}(2^{31} - 1) = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$ , el octavo en la lista, fue el primer nuevo número perfecto descubierto en 125 años y permaneció como el mayor conocido durante 150 años. Matemáticos como Peter Barlow escribieron en su libro *Theory of Numbers* publicado en 1811, que el número perfecto  $2^{30}(2^{31} - 1)$ :

... es el mayor que se podrá descubrir: ya que son simplemente curiosidades sin ninguna utilidad y nadie intentará encontrar uno superior.

¡Lo que se convirtió por supuesto en una de las afirmaciones más falsas sobre los números perfectos!

Con ésto parecería haber terminado la investigación acerca de los números perfectos. ¡No es así! Desde Euclides quedó abierto el problema de la existencia de una infinidad de números perfectos pares, pero ahora trasladado a la existencia de una infinidad de primos de Mersenne, primos de la forma  $2^k - 1$ .

Después de Euler queda además el problema de la existencia o no de números perfectos impares que Euler mismo calificó como *difficillima* [10, p 355]. Richard Guy nos dice acerca de la existencia de números perfectos impares “uno de los problemas no resueltos más celebres de la teoría de números” [21, p 25].

### 6.3.2. Números de Mersenne y Fermat

De la expresión:

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + \dots + 1$$

se sigue que si  $a^n - 1$  es primo, entonces  $a = 2$ . Si  $n = kl$ ,

$$\frac{a^n - 1}{a^l - 1} = a^{(k-1)l} + a^{(k-2)l} + \dots + 1$$

entonces

**Teorema 6.3.15. (Cataldi-Fermat)** Si  $2^n - 1$  es primo,  $n$  es primo.

Con este resultado tenemos que el problema de determinar cuales números de la forma  $2^k - 1$  son primos, los primos de Mersenne y denotados por  $M_p$ , se transforma en el problema de determinar los primos  $p$  para los cuales  $2^p - 1$  es primo. Se ha conjeturado que existe una infinidad de Primos de Mersenne  $M_p = 2^p - 1$ , se conocen 44.

En 1738 Euler resolvió la última de las afirmaciones de Cataldi cuando demostró que  $2^{29} - 1$  no era primo, por lo tanto las conjeturas de Cataldi no habían sido muy acertadas. Ahora debería apreciarse que Mersenne había acertado en ambas cuentas, ya que  $p = 31$  aparece en su lista pero  $p = 29$  no.

**Lema 6.3.16.** Si  $n$  es un entero positivo

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

□

**Teorema 6.3.17.** Si  $a^m + 1$  es primo, entonces  $a$  es par y  $m = 2^n$ .

**Demostración:** Por el lema anterior  $(c - d)|(c^t - d^t)$  para cualquier entero positivo  $t$ . Si  $m$  es un entero positivo pero no una potencia de 2,  $m = kl$  con  $1 \leq l < m$ ,  $1 \leq k < m$  y  $k$  impar. Sustituyendo  $c = a^k$ ,  $d = (-1)^k$  y  $t = l$ , se tiene

$$(a^k - (-1)^k)|(a^{kl} - (-1)^{kl})$$

así

$$(a^k + 1)|(a^m + 1)$$

Dado que  $a^k + 1 > 1$ ,  $a^m + 1$  no es primo cuando  $m$  no es una potencia de 2. Entonces tenemos que  $m = 2^n$ , si  $a$  es impar entonces  $a^{2^n} + 1$  es par. Por lo tanto,  $a$  es par. □

Cuando  $a = 2$ , tenemos los números de Fermat

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

$F_1 = 5$ ,  $F_2 = 17$ ,  $F_3 = 257$ ,  $F_4 = 65537$ . Fermat conjeturó que todos los  $F_n$  eran primos. Sin embargo, el 26 de Septiembre de 1732, Euler presenta ante la Academia de St. Petersburg [11] una prueba de que:

$$641|F_5.$$

Durante su larga vida académica, Euler regresó varias veces a este resultado y dió varias pruebas de la no primalidad de  $F_5$ .

En 1730 Goldbach demostró que los números de Fermat son primos relativos a pares y con base en esto demuestra que hay una infinidad de números primos.

**Lema 6.3.18. (Goldbach)** Cualesquiera dos números de Fermat  $F_n = 2^{2^n} + 1$  son primos relativos entre sí.

**Demostración:** Observemos que

$$F_x - 2 = 2^{2^x} - 1$$

Entonces

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1$$



Haciendo la sustitución  $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$  en el lado derecho:

$$F_{n+1} - 2 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$$

por lo tanto, sustituyendo  $n + 1$  por  $x$  tenemos

$$F_x - 2 = (F_{x-1} - 2)F_{x-1}$$

Por otra parte, tenemos

$$F_1 - 2 = F_0, \text{ donde } F_0 = 3$$

Luego por inducción se tiene que

$$F_n - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$$

Sean  $m$  cualquier entero menor que  $n$  y  $d$  cualquier factor común de  $F_m$  y  $F_n$ . Como  $F_m$  forma parte del producto del lado derecho,  $d$  debe ser un factor de  $F_n - 2$ . Así  $d$  es un factor de  $F_n$  y  $F_n - 2$ , en consecuencia  $d$  es un factor de 2. Pero todos los números de Fermat son impares, por lo tanto,  $d$  debe ser 1. Luego, el único factor común de cualquier número de Fermat y otro número de Fermat más pequeño es 1. Así los dos números de Fermat son primos relativos.

□

**Teorema 6.3.19. (Goldbach)** *Existen una infinidad de números primos.*

**Demostración:** Para cada número de Fermat  $F_n$ , escojamos un divisor primo  $p_n$ . Como los números de Fermat son primos relativos, sabemos que cualesquiera dos primos  $p_m$  y  $p_n$  son diferentes. Por lo tanto, existe al menos un primo  $p_n$  por cada número de Fermat  $F_n$ , es decir, al menos un primo por cada entero  $n$ .

□

Regresemos al trabajo de Euler acerca de los números de Fermat. Veamos cómo Euler factorizó a  $F_5$ . Fermat había afirmado que su fórmula  $F_n = 2^{2^n} + 1$  siempre producía primos para todo  $n$ , lo que es fácil comprobar que es cierto para  $n = 1, 2, 3$  y 4. Para estos números obtenemos:  $F_n = 5, 17, 257$  y  $65537$ , que son primos. Pero ¿qué hacer con el siguiente  $F_5 = 4\,294\,967\,297$  que tiene 10 dígitos?

Lo que Euler hizo, fué investigar acerca de las características que un número primo había de tener para ser divisor de números de la forma  $a + 1, a^{2^1} + 1, a^{2^2} + 1, a^{2^3} + 1, \dots$ , con  $a$  un número par, específicamente 2 para el caso de los números de Fermat. Para este fin se establecerán una serie de resultados:

**Teorema 6.3.20.** *Si  $a$  es un número par y  $p$  es un número primo que es factor de  $a + 1$ , entonces  $p = k \cdot 2 + 1$  para algún entero  $k$ .*

**Demostración:** Ésto es evidente ya que  $a$  es par,  $a + 1$  es impar y por tanto  $p$  es impar.  $\square$

**Teorema 6.3.21.** *Si  $a$  es un número par y  $p$  es un número primo que es factor de  $a^2 + 1$ , entonces  $p = k \cdot 2^2 + 1$  para algún entero  $k$ .*

**Demostración:** Dado que  $a$  es par,  $a^2$  también lo es y por el Teorema 6.3.20 se tiene que  $p = k \cdot 2 + 1$ . Tenemos dos posibilidades para  $p$ , a saber:

- (i)  $p = 4k + 1$  que es lo que deseamos demostrar o
- (ii)  $p = 4k + 3$ .

Veamos que el segundo caso (ii) no es posible. Si  $p = 4k + 3$ , entonces por el Pequeño Teorema de Fermat (las armas del propio Fermat para refutarlo) tenemos

$$p | (a^{p-1} - 1) = a^{4k+2} - 1. \quad (1)$$

Por otra parte, usando la serie geométrica:

$$p | (a^2 + 1)(a^{4k} - a^{4k-2} + \dots - a^2 + 1) = a^{4k+2} + 1. \quad (2)$$

Luego, de las ecuaciones (1) y (2) se sigue que

$$p | (a^{4k+2} + 1) - (a^{4k+2} - 1) = 2$$

Lo que es un absurdo, pues  $p$  es impar. En conclusión  $p = k \cdot 2^2 + 1$ .  $\square$

Ahora veremos uno de los teoremas más estéticos de Euler:

**Teorema 6.3.22. (Euler)** *Si  $a$  es par y  $p$  es un número primo que es un factor de  $a^{2^n} + 1$ , entonces  $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$  para algún entero  $k$ .*

**Demostración:** Por inducción sobre  $n$ . La primera parte queda sobradamente cubierta por los teoremas (6.3.20) y (6.3.21). Suponemos entonces que el resultado es verdadero para exponentes más pequeños que  $2^n$ .

Ahora bien, si  $p | (a^{2^n} + 1) = (a^2)^{2^{n-1}} + 1$ , nuestra hipótesis inductiva nos dice que  $p = k \cdot 2^n + 1$ . Para concluir, bastará probar que  $k$  es par. Por el Pequeño Teorema de Fermat tenemos

$$p | (a^{k \cdot 2^n} - 1). \quad (3)$$

Si  $k$  fuera un número impar, se tendría

$$p | (a^{2^n} + 1)(a^{(k-1)2^n} - a^{(k-2)2^n} + \dots - a^{2^n} + 1) = a^{k \cdot 2^n} + 1. \quad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4), concluimos nuevamente que  $p | 2$ , lo cual no es posible. Por lo tanto,  $k$  es un número par y  $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$  como habíamos afirmado.  $\square$

Armado con este teorema, Euler pudo fácilmente refutar a Fermat:

**Teorema 6.3.23.** *El número  $F_5 = 2^{32} + 1$  no es primo.*

**Demostración:** De lo anteriormente expuesto sabemos que si un primo  $p$  es factor de  $F_5$ , debe ser de la forma  $p = 64k + 1$ . Démosle valores a  $k$ :

- (i) Si  $k = 1$ , entonces  $p = 65$  no es primo.
- (ii) Si  $k = 2$ , entonces  $p = 129$  no es primo.
- (iii) Si  $k = 3$ , entonces  $p = 193$  es primo pero no divide a  $F_5$ .
- (iv) Si  $k = 4$ , entonces  $p = 257$  es primo pero no divide a  $F_5$ .
- (v) Si  $k = 5$ , entonces  $p = 321$  no es primo.
- (vi) Si  $k = 6$ , entonces  $p = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ .
- (vii) Si  $k = 7$ , entonces  $p = 449$  es primo pero no divide a  $F_5$ .
- (viii) Si  $k = 8$ , entonces  $p = 513 = 3^3 \cdot 19$ .
- (ix) Si  $k = 9$ , entonces  $p = 577$  es primo pero no divide a  $F_5$ .
- (x) Si  $k = 10$ , entonces  $p = 641$  es primo y divide a  $F_5$ .

Así, Euler había factorizado al monstruo:

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = (641)(6\,700\,417).$$

□

### 6.3.3. Generalización del pequeño teorema de Fermat

Los chinos sabían en los años 500 a.c. que  $p|(2^p - 2)$  para cada primo  $p$ . En una carta de 1640 a Frenicle de Bessy, Pierre de Fermat afirmó tener una prueba de un resultado más general:

**Teorema 6.3.24. (Pequeño Teorema de Fermat)** *Si  $a$  es un número entero y  $p$  es un primo que no es factor de  $a$ , entonces  $p$  es factor de  $a^{p-1} - 1$ .*

Como era su costumbre, Fermat no incluía la demostración en su carta. En su lugar decía, “Yo le enviaría la demostración si ésta no fuera demasiado extensa” [7, p 225].

**Ejemplo 6.3.25.** *Si  $p = 3$  y  $a = 23$  entonces  $3|(23^2 - 1) = 528$ , lo que es trivialmente cierto.*

**Ejemplo 6.3.26.** *Sin embargo, si tomamos  $p = 11$  y  $a = 9$ , de acuerdo al Teorema se tiene  $11|(9^{10} - 1) = 3\,486\,784\,401$ , lo cual es verdad pero dista mucho de ser obvio.*

En 1676, Leibniz observó que, para todo entero  $n$ ,

$$\begin{aligned} n^2 - n &\equiv n(n+1) \equiv 0 \pmod{2}, \\ n^3 - n &\equiv n(n+1)(n+2) \equiv 0 \pmod{3}, \end{aligned}$$

y de manera similar para 5 y para 7; pero que el resultado correspondiente no es cierto para 9, por ejemplo con  $n = 2$ .

Euler fue el primero en publicar una prueba del teorema de Fermat, la presentó el 2 de agosto de 1736 [9] ante la Academia de St. Petersburgo.

Euler conocía el trabajo de Newton acerca de la potencia de un binomio, en concreto el conocía el Teorema del binomio:

**Teorema 6.3.27. (Newton)** Sean  $a$ ,  $b$  y  $n$  números naturales, entonces:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}.$$

□

Utilizando el hecho de que  $p \mid \binom{p}{k}$  para toda  $1 \leq k \leq p-1$ . Euler demostró que

**Teorema 6.3.28.**

$$(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a \pmod{p}.$$

□

Enseguida, prueba:

**Teorema 6.3.29.** Si  $p$  es un número primo y  $a$  cualquier entero, entonces  $p$  es un factor de  $a^p - a$ .

**Demostración:** Inducción en  $a$ . Para  $a = 1$  la afirmación es trivialmente cierta. Suponemos el resultado para  $k \leq a$ , es decir, que  $p \mid (a^p - a)$ . Por el Teorema (6.3.28) y la hipótesis de inducción se tiene que:

$$p \mid [(a+1)^p - (a+1)] - (a^p - a) \equiv (a+1)^p - (a+1),$$

lo que completa la inducción.

□

Así, Euler concluye

**Teorema 6.3.30. (Pequeño teorema de Fermat)** Si  $p$  es un número primo y  $a$  es cualquier entero que no tiene como factor a  $p$ , entonces  $p$  es un factor de  $a^{p-1} - 1$ .

**Demostración:** Dado que  $p|(a^p - a) = a(a^{p-1} - 1)$  y no es factor de  $a$ , entonces necesariamente  $p$  es un factor de  $a^{p-1} - 1$ .  $\square$

Recordemos que desde Euclides (Proposición VII.30 de sus *Elementos*) se sabía que si un primo  $p$  es factor de un producto de enteros  $ab$ , entonces  $p|a$  o  $p|b$ .

**Nota 6.3.31.** Euler dió varias demostraciones del Pequeño Teorema de Fermat, la tercera de ellas fué publicada en 1758 y reproducida por Gauss en sus *Disquisitiones Arithmeticae*.

El trabajo de Euler en relación al Pequeño Teorema de Fermat no se concretó en dar varias demostraciones del mismo, sino que lo generalizaría haciendo uso de la hoy conocida *función phi de Euler*  $\phi(\cdot)$ , cuyo valor en el entero  $a \geq 1$  se define por

$$\phi(a) := \#\{1 \leq m \leq a \mid \gcd(a, m) = 1\},$$

El siguiente resultado lo presentó Euler ante la Academia de St. Petersburg el 15 de Octubre de 1759 [12]:

**Teorema 6.3.32.** Para cada entero  $a \geq 1$ ,

$$\phi(a) = \prod_{p^\alpha \parallel a} p^{\alpha-1}(p-1).$$

**Demostración:** Para los números primos,  $p$ , tenemos

$$\phi(p) = p - 1.$$

Si  $m = p^\alpha$ , entonces los números que tiene un factor común con  $m$  son los múltiplos de  $p$ :  $p, 2p, \dots, p^{\alpha-1}p$ . Hay  $p^{\alpha-1}$  de estos múltiplos, así el número de enteros positivos primos relativos a  $p^\alpha$  es

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1) \quad (5)$$

Por otra parte, si  $p$  y  $q$  son dos primos distintos,  $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$ . En efecto, los números que tiene un factor común con  $pq$  son los múltiplos de  $p$ :  $p, 2p, \dots, qp$ , y los múltiplos de  $q$ :  $q, 2q, \dots, pq$ . Es decir, el número de enteros positivos que tienen un factor común con  $pq$  es  $p + q - 1$ , luego

$$\phi(pq) = pq - p - q + 1 = (p-1)(q-1) = \phi(p)\phi(q)$$

Por inducción en  $\alpha$  y  $\beta$  puede demostrarse que  $\phi(p^\alpha q^\beta) = \phi(p^\alpha)\phi(q^\beta)$ . Luego, por inducción sobre el número de factores primos de  $a$  se obtiene el resultado.  $\square$

En el mismo año Euler presenta:

**Teorema 6.3.33.** Para todos los enteros  $a \geq 1$  y  $n$  tales que  $\gcd(a, n) = 1$ , se tiene que

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

**Demostración:** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}$  todos los enteros positivos menores que  $n$  que son primos relativos con  $n$ . Como  $\gcd(a, n) = 1$ , entonces cada elemento del conjunto  $\{aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(n)}\}$  es congruente modulo  $n$  con uno y sólo uno del conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}\}$ . Tomando el producto de estas congruencias se tiene

$$aa_1aa_2 \cdots aa_{\phi(n)} \equiv a_1a_2 \cdots a_{\phi(n)} \pmod{n}$$

por lo tanto

$$a^{\phi(n)}a_1a_2 \cdots a_{\phi(n)} \equiv a_1a_2 \cdots a_{\phi(n)} \pmod{n}$$

Como  $\gcd(a_1a_2 \cdots a_{\phi(n)}, n) = 1$ , podemos dividir ambos lados por  $a_1a_2 \cdots a_{\phi(n)}$ . Así obtenemos

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

□

La notación  $\phi(\cdot)$ , así como la noción de congruencia módulo  $p$  se deben a Gauss, quien las introduce en 1801 en la primera edición de sus “*Disquisitiones arithmeticae*”. Euler usó la notación  $\pi a$  para  $\phi(a)$ , pero sólo a partir de su segunda prueba del teorema (6.3.32) en 1780. Sylvester le dio el nombre de “totient function” en 1879.

### 6.3.4. Sumas infinitas

Hasta la llegada de Euler, las series y productos infinitos habían aparecido pocas veces y en general de manera aislada. La serie geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ , era conocida por los matemáticos griegos para algunos valores especiales, como  $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ . Por ejemplo, la curvatura de la parábola debida a Arquímedes depende de la fórmula

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Las series aparecen también en los trabajos de Nicholas de Orseme (1323-1382) y Pietro Mengoli (1625-1686) quien parece ser el primero en plantear el problema de encontrar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Éste, al que se le llamó el problema Basel eludió los esfuerzos de matemáticos de la talla de Leibniz, inventor del Cálculo y que había calculado sumas como:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Jakob Bernoulli quien amaba las series y probó la divergencia de la serie armónica, también conocía la suma exacta de un gran número de series convergentes como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 26.$$

Eventualmente volvió su atención a las series de la forma, con la la notación de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Para  $s = 1$ , obtenemos la serie armónica que Jakob conocía perfectamente, para  $s = 2$  se tiene el problema Basel. Partiendo de la desigualdad  $2n^2 \geq n(n+1)$ , Bernoulli encontró que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} + \dots$$

La última es una serie telescópica cuya suma es 2, así Bernoulli pensó que si la serie más grande era convergente, también lo sería la más pequeña y que además  $\zeta(2) \leq 2$ , éste es conocido hoy en día como criterio de comparación, y no sólo eso, sino que entonces también son sumables las series  $\zeta(3)$ ,  $\zeta(4)$ ,  $\zeta(5)$ , ... Al sumar algunos términos, la serie  $\zeta(2)$  podía ser aproximada, pero desgraciadamente ésta es de crecimiento muy lento.

#### **Ejemplo 6.3.34.**

(i) Usando 100 términos se tiene  $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = 1,63498$ .

(ii) Usando 1000 términos se tiene  $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} = 1,643930$ .

Bernoulli admitió su derrota y en su *Tractatus de seriebus infinitis* de 1689 dice [8, p 42]:

*If anyone finds and communicates to us that which thus far has eluded our efforts, great will be our gratitude.*

En 1731 con 24 años de edad y con un truco muy ingenioso [13], Euler prueba que:

$$\zeta(2) = (\log 2)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}, \quad (6)$$

serie que converge muy rápidamente debido al factor  $2^n$  en el denominador. Sumando únicamente 14 términos, se encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1,644934,$$

lo que es correcto hasta el sexto lugar.

El truco genial de Euler fué evaluar la integral impropia:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\log(1-t)}{t} dt$$

de dos maneras distintas. Por una parte, el reemplazó  $\log(1-t)$  por su expansión en serie e integró término a término para obtener:

$$I = t + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{9} + \cdots + \cdots \Bigg|_0^{\frac{1}{2}},$$

luego;

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1/2^2}{2^2} + \frac{1/2^3}{3^2} + \cdots \quad (7)$$

Por otra parte, Euler sustituye  $z = 1-t$  para transformar la integral original en:

$$I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\log z}{1-z} dz = \int_1^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \right) z^n \log z dz,$$

mediante integración por partes, obtiene:

$$\begin{aligned} I &= (z \log z - z) + \left( \frac{z^2}{2} \log z - \frac{z^2}{2^2} \right) + \left( \frac{z^3}{3} \log z - \frac{z^3}{3^2} \right) + \cdots \Bigg|_1^{\frac{1}{2}} \\ &= \log z \left[ z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \right] - \left( z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots \right) \Bigg|_1^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$



pues la expresión en el primer parentésis es la serie de  $-\log(1-z)$ , así Euler llega a:

$$I = -(\log 2)^2 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1/2^2}{2^2} + \frac{1/2^3}{3^2} + \cdots \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (8)$$

Ahora, igualando las expresiones en (7) y (8) se obtiene (6).

Euler siguió trabajando con las sumas  $\zeta(n)$  y llegó a calcular [15], [17]

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= 1,64493406684822643647 \dots \\ \zeta(3) &= 1,202056903159594 \dots \\ \zeta(4) &= 1,08232323371113819 \dots \end{aligned}$$

Cuando parecía terminado el problema Basel, inesperada y repentinamente alrededor de 1735, Euler tuvo una de sus geniales inspiraciones que le permitió calcular con exactitud [18]  $\zeta(2)$ ,  $\zeta(4)$ , ...

He aquí la traducción de A. Weil de las primeras líneas del artículo de Euler [39, p 261]:

*So much work has been done on the series  $\zeta(n)$  that it seems hardly likely that anything new about them may still turn up. ... I, too, in spite of repeated efforts, could achieve nothing more than approximate values for their sums. ... Now, however, quite unexpectedly, I have found an elegant formula for  $\zeta(2)$ , depending on the quadrature of a circle [i.e., upon  $\pi$ ].*

Con ésto Euler había saltado a la palestra internacional, cuando Johann Bernoulli conoció la solución escribió [2]: *Utinam Frater superstes effret! (¡Si sólo mi hermano estuviese vivo!)*

El problema de la evaluación numérica de  $\zeta(n)$  fué lo que probablemente [38] llevó a Euler a su famosa *fórmula de la suma de Euler-Maclaurin*, que fué una de sus herramientas favoritas y la usó con ingeniosas variaciones en cientos de problemas:

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + \cdots + f(m) &= \int_0^m f(x) dx + \frac{1}{2}(f(0) + f(m)) \\ &+ \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{2k-1}(m) - f^{2k-1}(0)). \end{aligned}$$

Ya había encontrado los números de Bernoulli  $B_{2k}$ , que como sabemos están dados por los coeficientes de la expansión en serie

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Lo cual puede seguirse de la expansión en fracciones parciales

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right).$$

Euler anunció la fórmula de la suma en 1732 [14], luego ya más elaborada en 1736 [15] y también en su libro [16] sobre cálculo diferencial. Maclaurin llegó a ella aparentemente en 1738. Euler jamás estableció disputa alguna sobre la prioridad de ésta.

Entonces Euler llegó a la hermosa fórmula:

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k} 2^{2k}}{2(2k)!} \pi^{2k}.$$

Además de las series zeta, Euler trabajó en las  $L$ -series

$$L(2k+1) = 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \cdots$$

Para ellas, obtuvo la fórmula:

$$L(2k+1) = \frac{1}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k} \pi^{2k+1},$$

donde los  $E_{2k}$  son llamados *números de Euler* y están definidos por

$$\sec z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{2k} z^{2k}}{(2k)!}.$$

Ésto puede seguirse de

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x} \right).$$

De todos estos resultados, Euler dió una exposición magistral en su libro [17].

### 6.3.5. El problema de Basilea

Veamos ahora cómo fué que Euler consiguió evaluar en forma cerrada  $\zeta(2)$ .

Euler sabía que si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $n$  con raíces distintas de cero  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  y tal que  $p(0) = 1$ , entonces se puede escribir como:

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right).$$

Para Euler también era bien conocida la expansión en serie:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots \quad (9)$$

La genial idea de Euler (que levantó algunas suspicacias) fué pensar que lo que era válido para un polinomio ordinario, permanecería válido para un “polinomio infinito”.

Así que como las raíces de  $\frac{\sin x}{x}$  son  $\pm n\pi$ , se tiene

$$\frac{\sin x}{x} = \left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right] \dots \quad (10)$$

Nada más natural para Euler que expandir el lado derecho de (10) e igualar con (9) para obtener

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \dots\right) x^2 + \dots,$$

ahora solamente tenemos que igualar los coeficientes de  $x^2$  para tener la igualdad:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right).$$

Y elegantemente concluir que:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

El problema Basilea se había resuelto!

Los procesos infinitos involucrados en la solución dada por Euler al problema Basilea no tenían una buena justificación, tal vez por eso y para ser más convincente es que Euler en la *Introductio* señala que al sustituir  $x = \frac{\pi}{2}$  en la ecuación (10) se obtiene que

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \left[1 - \frac{1}{4}\right] \left[1 - \frac{1}{16}\right] \left[1 - \frac{1}{36}\right] \dots,$$

y se sigue la fórmula que John Wallis había obtenido en 1655 por un camino diferente:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}.$$

Euler dió varias demostraciones de  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , en particular en una memoria olvidada y rescatada por Paul Stäckel en 1907, Euler da la siguiente demostración directa.

Euler parte de la relación [38, p 86]

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

expandiendo en serie de potencias e integrando término a término se llega a

$$\arcsin x = x + \sum_{k \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} x^{2k+1}.$$

Una integración por partes produce la relación

$$\int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = (\arcsin x)^2 - \int_0^x \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Ahora reemplazamos  $\arcsin x$  en el integrando por su serie de potencias e integramos término a término de 0 a 1. Una integración por partes demuestra que si

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

entonces se tiene la relación

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

de donde  $I_n$  puede calcularse para todo  $n$ . Resultando que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \cdots,$$

lo que conduce a la fórmula de Euler.

## 6.4. Después de Euler

En esta sección presentaremos algunos trabajos que se realizaron posteriormente en teoría de números relacionados con los temas estudiados por Euler. Iniciaremos ésta con los números perfectos y primos de Mersenne.

### 6.4.1. Números perfectos y primos de Mersenne

Después de Euler el siguiente avance en el estudio de los números perfectos es realizado por Lucas en 1876 al descubrir el primer error de la lista de Mersenne. Demostró que  $2^{67} - 1$  no es primo aunque sus métodos no le permitieron encontrar ningún factor. Lucas justificó que uno de los números de la lista de Mersenne era correcto cuando demostró que  $2^{127} - 1$  es un primo de Mersenne y por lo tanto  $2^{126}(2^{127} - 1)$  es un número perfecto. Lucas hizo un descubrimiento importante que, modificado por Lehmer en 1930, resultó la base de las búsquedas computacionales actuales para encontrar los números primos de Mersenne y por lo tanto para encontrar números perfectos. Basándose en el resultado de Lucas de que  $p = 127$  daba un primo de Mersenne, Catalan conjeturó que:

*Si  $m = 2^p - 1$  es primo entonces  $2^m - 1$  también lo es.*

Así se tiene la sucesión de Catalan  $\{2^p - 1\}$  en la que

$$p = 3, 7, 127, 170141183460469231731687303715884105727, \dots$$

Por supuesto si esta conjetura fuera verdadera resolvería la todavía abierta pregunta de si existe un número infinito de números primos de Mersenne, y también resolvería la pregunta de si existen infinitos números perfectos. Sin embargo la comprobación de si el cuarto término de esta sucesión,  $2^p - 1$  para

$$p = 170141183460469231731687303715884105727,$$

es primo está mucho más allá de lo que la tecnología permite realizar.

En 1883 Pervusin demostró que  $2^{60}(2^{61} - 1)$  es un número perfecto. Esto fue demostrado independientemente tres años más tarde por Seelhoff.

En 1903 Cole consiguió factorizar  $2^{67} - 1$ , el número que Lucas demostró que era compuesto, pero para el que en ese momento se desconocían los factores. En octubre de 1903 Cole presentó un artículo, *Factorización de números grandes*, en una reunión de la Sociedad Matemática Americana. En una de las “charlas” más extrañas pronunciada alguna vez,

*Cole escribió en la pizarra*

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927.$$

*Después escribió 761838257287 y debajo 193707721. Sin decir una sola palabra multiplicó los dos números entre sí para obtener*

$$147573952589676412927$$

*y se sentó para aplaudir desde el auditorio.*

Hoy en día las computadoras personales con el software adecuado pueden dar la factorización de  $2^{67} - 1$  en segundos.

Posteriormente se encontraron otros errores cometidos por Mersenne. En 1911 Powers demostró que  $2^{88}(2^{89} - 1)$  era un número perfecto, y unos años después demostró que  $2^{101} - 1$  es primo y por lo tanto  $2^{100}(2^{101} - 1)$  es un número perfecto. En 1922 Kraitchik demostró que Mersenne se había equivocado al afirmar que el mayor número primo de Mersenne se obtiene con  $p = 257$  cuando demostró que  $2^{257} - 1$  no es primo.

Por otra parte, ha habido intentos para demostrar que un número perfecto impar no podría existir. Los resultados de mayor trascendencia han consistido acerca del mínimo número de diferentes factores primos que debe tener un número perfecto impar. Sylvester trabajó en este problema y escribió:

*... la existencia de un número perfecto impar – es fantasía, o sería lo mismo decir que desde el complejo entramado de condiciones que le rodean por todos los lados – parece más un milagro.*

De hecho Sylvester demostró en 1888 que cualquier número perfecto impar debería tener al menos 4 factores primos distintos. En el mismo año mejoró sus resultados a cinco factores y, con el paso del tiempo, hemos llegado a saber que un número perfecto impar debería tener al menos 8 factores primos distintos, y al menos 29 factores primos que no tienen porque ser necesariamente distintos. También sabemos que tal número tendría más de 300 dígitos y un divisor primo mayor que 106. El problema de si existe tal número perfecto permanece sin resolver.

Hoy conocemos 44 números perfectos,  $2^{88}(2^{89} - 1)$  fue el último que se descubrió “a mano” en 1911 aunque este no fue el mayor que se descubrió de esa forma, el resto se han encontrado usando computadoras. De hecho, las computadoras han despertado el interés en los primos de Mersenne, y por supuesto en los números perfectos. Por el momento, el mayor primo de Mersenne conocido es  $2^{32582657} - 1$ , el mayor número primo conocido, y su correspondiente número perfecto es  $2^{32582657}(2^{32582657} - 1)$ . Fue descubierto por Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al el 4 de septiembre de 2006 y éste contiene más de 9 millones de dígitos. En la página web de Harry J. Smith [36] se encuentra una tabla completa con información acerca de los primos de Mersenne y números perfectos, reproducimos la parte final de ésta:

Lugar	$p$	Dígitos en $M_p$	Dígitos en $P_p$	Fecha del descubrimiento
(1) 38	6972593	2098960	4197919	1999-06-01
(2) 39	13466917	4053946	8107892	2001-11-14
(3) 40?	20996011	6320430	12640858	2003-11-17
(4) 41?	24036583	7235733	14471465	2004-05-15
(5) 42?	25964951	7816230	15632458	2005-02-18
(6) 43?	30402457	9152052	18304103	2005-12-15
(7) 44?	32582657	9808358	19616714	2006-09-04

Descubridores	Hardware
(1) Nayan Hajratwala, Woltman, Kurowski & GIMPS (2) Michael Cameron & GIMPS (3) Michael Shafer & GIMPS (4) Josh Findley & GIMPS (5) Nowak, Woltman, Kurowski, et al (6) Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al (7) Cooper, Boone, Woltman, Kurowski, et al	Pentium II 350 800 MHz AMD T-Bird PC 2 GHz Pentium 4 Dell Dimension PC 2.4 GHz Pentium 4 2.4 GHz Pentium 4

donde  $p$  es primo,  $M_p$  es el primo de Mersenne correspondiente a  $p$  y  $F_p$  es el número perfecto correspondiente a  $p$ .

### 6.4.2. Números de Fermat

Recordemos que Fermat había conjeturado que los números de la forma  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , los números de Fermat, son primos para todo  $n$  (1650). Euler demuestra que esta conjetura es falsa (1732); mostrando que  $641 | F_5$ , para establecer esto demuestra previamente que los factores primos de  $F_n$  son de la forma  $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$  para algún entero  $k$ . Con su trabajo Euler no concluía la investigación de este tema, sino por el contrario le dio nueva vida, y dio inicio a varias vertientes de interés, por ejemplo:

- El estudio de la primalidad de  $F_n$ .
- Hallar la factorización de los  $F_n$  que son compuestos.
- Establecer la cardinalidad del conjunto  $\{F_n \mid F_n \text{ es primo}\}$ .

Así, Eisenstein propuso en 1844 demostrar que existe una infinidad de primos de Fermat [33, p. 88].

Respecto a los factores primos de los números de Fermat, el siguiente avance significativo es dado por Édouard Lucas en 1878 al probar [24, p 59]:

**Teorema 6.4.1.** *Si  $n > 1$  y  $p$  es un primo tal que  $p | F_n$ , entonces  $p$  es de la forma*

$$p = k2^{n+2} + 1,$$

donde  $n$  es un número natural.

Este teorema mejora el resultado de Euler (Teorema 6.3.22).

Para el estudio de la primalidad de los números de Fermat tenemos el siguiente criterio dado por Pépin en 1877 [24, p 42]:

**Teorema 6.4.2. (Criterio de Pépin)** *Para  $n \geq 1$  el número de Fermat  $F_n$  es primo si y sólo si*

$$3^{F_n-1/2} \equiv -1 \pmod{F_n}.$$

Hardy y Wright dan un argumento heurístico a favor de la finitud de los números de Fermat,  $F_n$ , [22, p 15] que son primos. Sigue abierto el problema de la finitud o no de los primos de Fermat.

La factorización de los números de Fermat, que no son primos, es un problema extremadamente difícil debido al tamaño de estos. De hecho, sólo  $F_n$  para  $5 \leq n \leq 11$

han sido factorizados completamente, aunque se sabe que 231 números de Fermat  $F_n$  son compuestos.

En 1973 I. Canals verifica computacionalmente la no primalidad de  $F_n$  para  $5 \leq n \leq 14$  usando el criterio de Pépin [3]. En 1970 se sabía que  $F_n$  era compuesto para  $5 \leq n \leq 14$ .

En el devenir del quehacer matemático los entes de esta disciplina se relacionan de manera fantástica, recientemente F. Luca [26] demostró el siguiente teorema:

**Teorema 6.4.3.** *Un número de Fermat no puede ser un número perfecto.*

En este teorema convergen dos de los temas que más cautivaron a Euler.



# Bibliografía

- [1] R. Apéry, *irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$* , Astérisque, 61 (1979), 11-13.
- [2] Johann Bernoulli, *Opera Omnia*, Vol. 4, Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1968 (Reprint), p. 22.
- [3] I. Canals, *Fermat numbers and the limitation of computeres*, Acta Mexicana Ci. Tecn 7(1973), 29-30.
- [4] R. D. Carmichael, “*Note on Euler’s  $\varphi$ -function*”, American M. S. Bull. 28, 109-110, 1922.
- [5] I. C. Chadid, *Leonhard Euler*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.
- [6] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers, vol. I, Divisibility and primality*, Carnegie Inst., WASHINGTON, 1919.
- [7] William Dunham, *Journey through Genius*, Penguin Books, 1990.
- [8] William Dunham, *Euler, The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, 1999.
- [9] L. Euler, “*Theorematum quorundam numeros primos spectantium demonstratio*”, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, pp.141-146, 1741.
- [10] L. Euler, *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol 5.
- [11] L. Euler, “*Observationes de theoremate quodam Fermatiano aliisque ad numeros primos spectantibus*”, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6, pp 103-107, 1738.
- [12] L. Euler, “*Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata*”, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1763, pp 74-105.
- [13] L. Euler, *Opera Omnia. De summatione innumerabilium progressionum*, I-14 (1730/1), 25-41.

- [14] L. Euler, *Opera Omnia. Methodus generalis summandi progressionibus*, I-14 (1732/3) 42-72.
- [15] L. Euler, *Opera Omnia. Invention summae cuiusque seriei ex dato termino generali*, I-14 (1736), 108-123.
- [16] L. Euler, *Opera Omnia. Institutiones calculi differentialis*, I-10 (1755), 309-336.
- [17] L. Euler, *Opera Omnia. Introductio in analysin infinitorum*, I-8 (1748), Ch 11, 201-204. *Introduction to Analysis of the Infinite*, Book I, translated by John D. Blanton, Springer-Verlag, 1988.
- [18] L. Euler, *Opera Omnia. De summis serierum reciprocarum*, I-14 (1734/5), 73-86.
- [19] L. Euler, *Opera Omnia. Meditationes circa singulare serierum genus*, I-15 (1775), 217-267.
- [20] Harold M. Edwards, *Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag New York, 1977.
- [21] Richard Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag New York, 1981.
- [22] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to THE THEORY OF NUMBERS*, Oxford University Press, Fourth Edition, 1960.
- [23] W. Keller, <http://www.prothsearch.net/fermat.html>
- [24] M. Křížek, F. Luca and L. Somer, *17 Lectures on Fermat Numbers*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2001.
- [25] D. H. Lehmer, "On Euler's totient function", American M. S. 38, 745-751, 1932.
- [26] F. Luca, *The anti-social Fermat number*, Amer. Math. Monthly 107 (2000), 171-173.
- [27] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Perfect numbers*, MacTutor History of Mathematics.  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Perfect—numbers.html>
- [28] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Prime numbers*, MacTutor History of Mathematics.  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Prime—numbers.html>
- [29] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham*, MacTutor History of Mathematics.  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Haytham.html>

- [30] R. Rashed, *The development of Arabic mathematics : between arithmetic and algebra*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [31] R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Les Belles Lettres, 1984.
- [32] R. Rashed, *Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*, Historia Math. 16 (4) (1989), 343-352.
- [33] P. Ribenboim, *The new book of prime number records*, Springer, New York, 1996.
- [34] T. Rivoal, *La fonction zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, arXiv: math. NT/0008051 v 1 2000.
- [35] D. Shanks, "*Solved And Unsolved Problems In Number Theory*", Fourth Edition, AMS Chelsea Publishing, 2000.
- [36] Harry J. Smith,  
<http://www.geocities.com/hjsmithh/Perfect/Mersenne.html>
- [37] P. Stäckel, *Eine vergessene abhandlung Leonhard Eulers Über die summe der reziproken quadrate der natürlichen zahlen*, Bibliotheca Mathematica, 8 (1907-1908), 37-54, in I-14, 156-176.
- [38] V. S. Varadarajan, *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, A. M. S. 2006.
- [39] A. Weil, *Number Theory: An Approach through History from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984.
- [40] <http://www.mersenne.org>



## Capítulo 7

# Las curvas elásticas de Euler

A. Anzaldo-Meneses <sup>1</sup> y C. Romero-Meléndez <sup>2</sup>

### Resumen

Estudiamos a las curvas elásticas en el plano Euclideo ( $R_2$ ), la esfera ( $S_2$ ) y el plano hiperbólico ( $H_2$ ) desde el punto de vista de la geometría subRiemanniana. Para ello partimos de un marco móvil para las curvas, el cual junto con las métricas correspondientes a cada caso,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$ , definen a una estructura subRiemanniana. Aquí  $\epsilon = 0, 1, -1$  para  $R_2, S_2$  y  $H_2$  respectivamente. Aplicando el principio máximo de Pontryagin al funcional de la energía de deformación dado por la curvatura geodésica, y a las relaciones del marco móvil, obtenemos las curvas elásticas. Se muestran diversas gráficas de las curvas elásticas que se encuentran clasificadas en términos de los módulos de ciertas curvas elípticas.

### 7.1. Introducción

En el año 1744 Leonhard Euler investigó el problema de la encorvadura de una varilla elástica de espesor y anchura uniformes, que en estado natural forme una línea recta: la determinación de la forma que adopta la varilla al ser deformada por la acción de una fuerza externa. Este problema había sido ya estudiado en 1691 por James Bernoulli y en 1742 por Daniel Bernoulli, quien afirmó que la energía elástica de la

---

<sup>1</sup>Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, alfonso\_rex@hotmail.com

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, cutberto@correo.azc.uam.mx

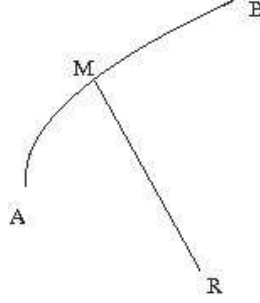


Figura 7.1: Varilla elástica

barra deformada es proporcional a la magnitud  $\int \kappa^2 ds$ , en donde  $\kappa$  es la curvatura geodésica de la barra, y sugirió a L. Euler encontrar las curvas resultantes a partir del principio variacional  $\int \kappa^2 ds \rightarrow \min$ . En su artículo *Sobre las curvas elásticas*, Euler llamó A y B a los extremos de la varilla,  $AM = s$  al arco de A a un punto M sobre la varilla, y R el radio de curvatura en el punto M. De acuerdo a Bernoulli, la *fuerza potencial* del trozo AM puede representarse por  $\int \frac{ds}{R^2}$ , entonces Euler afirmó que la curva resultante sería tal que esta expresión integral habría de tomar su valor mínimo.

Denominó a esta curva resultante *elástica*. Como el radio de curvatura de la varilla está dado por diferenciales de segundo orden, se requerirían cuatro condiciones para determinar completamente a la curva resultante, por lo que estableció dos condiciones más, aparte de que la curva tenga sus extremos A y B fijos: que las tangentes a la curva en los puntos A y B tengan direcciones prescritas. De este modo el problema de encontrar cómo se encorvará una varilla elástica lo formuló Euler de la siguiente manera:

*Hallar entre todas las curvas de igual longitud, que no solo pasen por los puntos A y B sino que además en estos puntos sean tangentes a las rectas dadas, aquella en la que el valor de la expresión  $\int \frac{ds}{R^2}$  sea mínimo [3].*

Las curvas elásticas en  $R_2$  fueron calculadas por primera vez por Euler[9] y han sido de gran interés desde entonces. En particular, recientemente han sido estudiadas sobre la esfera y el plano hiperbólico [4]. Sin embargo no hemos encontrado figuras de estas curvas graficadas y clasificadas con suficiente claridad. En general los resultados son utilizados tan solo para mostrar a dichas curvas de manera esquemática a diferencia de las curvas que Euler graficó originalmente. Dada la naturaleza variacional del problema, las simetrías del mismo determinan la geometría de sus soluciones, de este

modo la elección de coordenadas adecuadas es fundamental. Una manera de obtener un gran número de propiedades acerca de la geometría de la curva  $\gamma(t)$  es utilizar el marco móvil de coordenadas. Adoptaremos el enfoque de sistemas diferenciales sobre productos semidirectos entre grupos de Lie y espacios vectoriales. En este trabajo clasificamos en detalle las diversas curvas resultantes, mostrando gráficamente su forma. Hacemos incapié en una exposición clara que muestre las características geométricas de la manera lo más simple posible.

Aun y cuando solo calcularemos curvas elásticas en las superficies mencionadas, haremos una formulación del problema en hipersuperficies para luego considerar los tres casos particulares de interés.

## 7.2. Marcos móviles en hipersuperficies

Resumimos a continuación algunos resultados bien conocidos [2] que nos serán de gran utilidad mas adelante. Dado  $n \geq 2$ , denotemos por  $E_n$  una de las siguientes hipersuperficies de curvatura seccional constante  $\epsilon = 0$ ,  $\epsilon = 1$ , y  $\epsilon = -1$ , respectivamente

$$\begin{aligned} R_n &= \{q \in \mathbb{R}^{n+1} | q_{n+1} = 1\}, \\ S_n &= \{q \in \mathbb{R}^{n+1} | q_1^2 + \cdots + q_n^2 + q_{n+1}^2 = 1\}, \\ H_n &= \{q \in \mathbb{R}^{n+1} | q_1^2 + \cdots + q_n^2 - q_{n+1}^2 = -1, q_{n+1} > 0\}. \end{aligned}$$

Definamos sobre  $E_n \times E_n$  la forma cuadrática

$$\langle q, p \rangle_\epsilon = q_1 p_1 + \cdots + q_n p_n + \epsilon q_{n+1} p_{n+1}.$$

que induce la correspondiente métrica  $\langle q, q \rangle_\epsilon = \|q\|_\epsilon^2$  en  $E_n$ .

Consideremos una curva  $\gamma(s)$  en  $E_n$ , parametrizada por su longitud de arco, dada por un punto móvil  $q(s)$  en  $E_n$ . Sea  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  una base ortonormal para el espacio tangente  $T_{q(s)}$ . Sea ahora  $\alpha_{n+1}$  el vector normal a la hipersuperficie  $E_n$  en  $q(s)$ , entonces el conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$  es una base ortonormal para  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Así pues, tendremos que

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle_\epsilon = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, n+1.$$

Y deducimos de ello que

$$\langle \dot{\alpha}_i, \alpha_j \rangle_\epsilon + \langle \alpha_i, \dot{\alpha}_j \rangle_\epsilon = 0, \quad i, j \neq n+1, \quad \langle \dot{\alpha}_i, \alpha_{n+1} \rangle_\epsilon + \langle \alpha_i, \dot{\alpha}_{n+1} \rangle_\epsilon = 0, \quad i \neq n+1,$$

de donde se sigue que

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{j \neq i, n+1} \omega_{ij} \alpha_j - \epsilon \omega_i \alpha_{n+1}, \quad i \neq n+1, \quad \text{y} \quad \dot{\alpha}_{n+1} = \sum_{j \neq n+1} \omega_j \alpha_j,$$

siendo las  $\omega_i$  y  $\omega_{ij}$  funciones de la longitud de arco con  $\sum_i \omega_i^2 = 1$  y  $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ . Definamos a la matriz antisimétrica  $\Omega$  de  $n \times n$ , mediante  $(\Omega)_{ij} = \omega_{ij}$ . Consideremos a los vectores  $\alpha_i$  como vectores columna.

**Definición 7.2.1.** Llamaremos a  $g = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$  un marco móvil asociado a la curva  $\gamma$ .

Finalmente, definamos al vector  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  para escribir entonces

$$\dot{g} = g \begin{pmatrix} \Omega & \omega \\ -\epsilon \omega^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$\dot{g} = g \sum_i \omega_i \ell_i + \sum_{i < j} \omega_{ij} g \ell_{ij}, \quad (1)$$

con la base

$$\ell_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ -\epsilon e_i^t & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo las  $e_i$  los vectores ortonormales (columna) estandar de  $\mathbb{R}^n$  y  $A_{ij}$  la matriz con un '+1' en la entrada  $ij$ , un '-1' en la entrada  $ji$ , para  $i < j$  y cero en todas las demás entradas. Estas matrices satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\ell_i, \ell_j] &= -\epsilon \ell_{ij}, \\ [\ell_{ij}, \ell_{i'j'}] &= \delta_{ii'} \ell_{jj'} + \delta_{jj'} \ell_{ii'} + \delta_{ij'} \ell_{ji'} + \delta_{ji'} \ell_{ij'}, \\ [\ell_i, \ell_{jj'}] &= \delta_{ij'} \ell_j - \delta_{ij} \ell_{j'}. \end{aligned}$$

Para  $\epsilon = 0$  es el álgebra asociada al grupo de Lie  $G_\epsilon$  dado por el producto semidirecto  $G_0 = \mathbb{R}_n \ltimes SO_n$ , para  $\epsilon = 1$  el álgebra asociada a  $G_1 = SO_{n+1}$  y para  $\epsilon = -1$  el álgebra asociada a  $G_{-1} = SO(1, n)$ . Estos grupos son los grupos de isometrías de las hipersuperficies correspondientes. Otras bases para los generadores de las álgebras bien pudieran ser útiles.

### 7.3. El principio máximo de Pontryagin

Dado un sistema de control

$$\dot{q} = f_u(q), \quad q \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

con las condiciones iniciales

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1,$$



en donde  $M$  es una variedad suave, el campo vectorial  $q \rightarrow f_u(q)$  es suave sobre la variedad  $M$  para cada  $u \in U$ , los mapeos  $(q, u) \rightarrow f_u(q)$  y  $(q, u) \rightarrow \frac{\partial f_u}{\partial q}(q)$  son continuos para cada  $q \in M$ ,  $u \in U$  y  $t \rightarrow u(t)$  es una función medible y acotada localmente, consideremos el correspondiente problema de control óptimo

$$\int_0^{t_1} \phi(q(t), u(t)) dt \rightarrow \min ,$$

con  $\phi(q, u)$  suave. Se define la familia de Hamiltonianos

$$H_u^\lambda(h, q) = \langle h, f_u(q) \rangle + \lambda \phi(q, u),$$

en donde  $h$  pertenece al espacio cotangente  $T^*M$ ,  $q \in M$ ,  $u \in U$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno definido en  $M$ .

El principio máximo de Pontryagin (PMP) ver por ejemplo ([5]), proporciona una condición necesaria para la optimalidad de este problema de control óptimo :

**Teorema 7.3.1** (Pontryagin). *Sea  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$  un control que satisface el problema (2) y sea  $\bar{q}(t)$  la correspondiente solución a (2). Si  $\bar{q}(t_1)$  pertenece a la frontera del conjunto de accesibilidad al tiempo  $t_1$ , desde  $q_0$ , entonces existe una función-vector  $h(t) \in T^*M$ , para  $t \in [0, t_1]$ , tal que*

1.  $h(t) \neq 0$
2.  $\dot{h}(t) = -\frac{\partial H_{\bar{u}}^\lambda}{\partial q}(h(t), \bar{q}(t))$
3.  $H_{\bar{u}}^\nu(\lambda(t), \bar{q}(t)) = \max_u H_u^\nu(\lambda(t), \bar{q}(t))$ , para casi todo  $t \in [0, t_1]$

La pareja  $(q(t), u(t))$  se llama una trayectoria óptima correspondiente al problema (2). Entonces  $q(t)$  es la proyección de una curva integral  $\xi(t)$  del campo vectorial Hamiltoniano  $L_u^\lambda$  que corresponde a  $H_u^\lambda(h(t), q(t))$ , para  $\lambda = 0$  o  $\lambda = 1$ .

**Observación 7.3.2.** *Si  $(u(t), h(t), q(t))$  satisface el PMP, entonces  $H_u^\lambda(h, q)$  es constante para casi toda  $t \in [0, t_1]$ . Si la triada  $(u(t), h(t), q(t))$  satisface las condiciones del PMP, entonces la dupla  $(h(t), q(t))$  se denomina un extremal y a la correspondiente proyección  $q(t)$  sobre  $M$  se le conoce como una trayectoria extremal. Los extremales que corresponden a  $\lambda = 0$  se denominan extremales anormales y los que corresponden a  $\lambda = 1$ , extremales regulares.*

## 7.4. Curvas elásticas en $R_2$ , $S_2$ y $H_2$

Entendemos por curvas elásticas en  $E_n$  a aquellas trayectorias que minimizan al funcional de la energía elástica

$$\frac{1}{2} \int \kappa^2 ds, \quad (3)$$

sujeto a las condiciones no holonómicas (1). Aquí  $\kappa = \|\Omega\|$  es alguna norma matricial de  $\Omega$ , por ejemplo puede tratarse de la primera curvatura geodésica.

En este trabajo nos restringiremos al caso  $n = 2$ , el cual que tiene como modelo físico a una barra ideal elástica que se encuentra sujeta a esfuerzos sobre sus extremos y que se localiza en el plano Euclideo, la esfera o bien el plano hiperbólico. Podemos ahora aplicar los marcos móviles de la sección anterior para describir curvas sobre las superficies mencionadas. Sin embargo en este problema resulta de importancia utilizar los campos vectoriales invariantes por la izquierda asociados a los grupos de isometrías de la superficies correspondientes. Las bases adecuadas para este problema estan dadas entonces por

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $L_3 = L_{12}$  y álgebra

$$[L_1, L_2] = -\epsilon L_3, [L_2, L_3] = -L_1, [L_3, L_1] = -L_2,$$

donde  $[A, B] = BA - AB$ .

Por otro lado, las ecuaciones del marco móvil estan dadas por

$$\dot{\alpha}_3 = \omega_1 \alpha_1 + \omega_2 \alpha_2, \dot{\alpha}_1 = -\omega_{12} \alpha_2 - \epsilon \omega_1 \alpha_3, \dot{\alpha}_2 = \omega_{12} \alpha_1 - \epsilon \omega_2 \alpha_3. \quad (4)$$

Dado que medimos en longitudes de arco tenemos que  $\langle \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_3 \rangle_\epsilon = 1$ , lo que implica que

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1.$$

Para  $g \in G_\epsilon$  tendremos que las ecuaciones del marco móvil pueden ser reescritas en términos de campos vectoriales invariantes por la izquierda como

$$\dot{g} = g(-\omega_1 L_2 + \omega_2 L_1 + \omega_{21} L_3).$$

Ahora bien, interpretando a los vectores columna de  $g = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , como la normal a la superficie,  $\alpha_3$ , el vector tangente a la curva,  $\alpha_2$  y el vector normal a este último sobre el plano tangente a la superficie como  $\alpha_1$ , deducimos que  $\omega_{21} = -\omega_{12}$  corresponde a la curvatura geodésica  $\kappa$ .

Si denotamos la acción de  $L_i(g)$  sobre  $G_\epsilon$  por  $L_i(g) = gL_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  y consideramos la curvatura  $\kappa(t)$  como una función de control, el problema de las elásticas de Euler se establece como el siguiente problema de control optimal:

Minimizar el funcional

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} \kappa^2(t) dt$$

entre todas las curvas  $\gamma(t)$  de curvatura  $\kappa(t)$  con marco móvil asociado  $g = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , que sean solución al problema de Cauchy

$$\dot{g} = -\omega_1 L_2(g) + \omega_2 L_1(g) + \kappa L_3(g). \quad (5)$$

$$g(0) = A_0, g(t_1) = B_0, \dot{g}(0) = A_1, \dot{g}(t_1) = B_1$$

**Definición 7.4.1.** Una curva elástica en  $E_n$  es una solución  $g(t)$  de este problema.

El Hamiltoniano correspondiente, [5] lo podemos escribir como

$$H^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{2} \kappa^2 + H_4 H_2 + H_5 H_1 + \kappa H_3, \quad (6)$$

siendo las  $H_1, H_2$  y  $H_3$  las funciones Hamiltonianas asociadas a los campos  $L_1, L_2$  y  $L_3$ , respectivamente, y por conveniencia  $H_4$  y  $H_5$  a las constantes  $-\omega_1$  y  $\omega_2$ , respectivamente, las cuales satisfacen entonces que  $H_4^2 + H_5^2 = 1$ . La constante  $\lambda$  es cero para el caso anormal y  $-1$  para las trayectorias normales. Se satisface el álgebra de Poisson

$$\{H_1, H_2\} = -\epsilon H_3, \quad \{H_2, H_3\} = -H_1, \quad \{H_3, H_1\} = -H_2, \quad (7)$$

con  $H_4$  y  $H_5$  centrales. Sea  $\lambda = -1$  y  $H = H^{(-1)}$ , entonces el principio máximo de Pontryagin exige que

$$\partial_\kappa H = 0, \quad \text{y por tanto} \quad H_3 = \kappa.$$

El Hamiltoniano para las trayectorias normales será entonces

$$H = \frac{1}{2} H_3^2 + H_4 H_2 + H_5 H_1. \quad (8)$$

Las ecuaciones del movimiento son por tanto

$$\dot{H}_1 = (H_2 - \epsilon H_4) H_3, \quad \dot{H}_2 = (-H_1 + \epsilon H_5) H_3, \quad \dot{H}_3 = H_1 H_4 - H_2 H_5, \quad (9)$$

junto con  $\dot{H}_4 = 0$  y  $\dot{H}_5 = 0$ . Si ahora multiplicamos a la primera por  $H_1$ , a la segunda por  $H_2$  y las sumamos, obtenemos inmediatamente que

$$H_1^2 + H_2^2 + \epsilon H_3^2 = \text{constante}.$$

Llamando a esta constante  $C$ , es fácil demostrar que  $C$  es un elemento de Casimir del álgebra de Poisson (7). Finalmente, derivando a la ecuación para  $H_3$  encontramos

$$\ddot{H}_3 = \dot{H}_1 H_4 - \dot{H}_2 H_5 = (H_2 H_4 + H_1 H_5 - \epsilon) H_3,$$

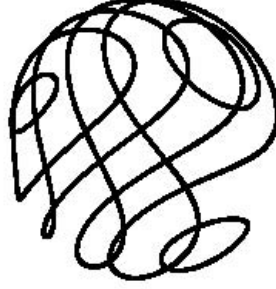


Figura 7.2: Intersecciones en el espacio cotangente,  $\epsilon = 1$

y con ello

$$2\ddot{H}_3 + H_3^3 - 2(H - \epsilon)H_3 = 0. \quad (10)$$

Esta expresión coincide con el resultado de [4] obtenido para el caso  $H_4 = 0$  y  $H_5 = 1$ , lo cual era de esperarse. Las soluciones de esta ecuación son funciones elípticas y serán analizadas en la sección siguiente.

Notemos que en el espacio cotangente las curvas normales se encuentran en la intersección de las superficies

$$\frac{1}{2}H_3^2 + H_4H_2 + H_5H_1 - H = 0,$$

$$H_1^2 + H_2^2 + \epsilon H_3^2 - C = 0,$$

$$H_4^2 + H_5^2 - 1 = 0.$$

Vemos que dado que  $H_4$  y  $H_5$  son constantes y se pueden parametrizar mediante  $H_4 = -\cos(\theta_0)$  y  $H_5 = \sin(\theta_0)$  con  $\theta_0$  constante, basta con considerar cualquier caso particular, ya que los primeros dos términos de la segunda superficie son invariantes ante rotaciones como la expresada por los términos segundo y tercero de la primer superficie. En la figura 7.2 se muestra la esfera con el cilindro del análogo cinético de Kirchhoff.

Se puede deducir otra constante del movimiento, que depende por supuesto de las constantes  $H$  y  $C$ , pero que permite la introducción del llamado ‘análogo cinético’

de Kirchhoff. Notemos que

$$(H_1 - \epsilon H_5)^2 + (H_2 - \epsilon H_4)^2 = C + 1 - 2\epsilon H = \text{constante}.$$

Llamando  $J^2$  a esta constante, tenemos que esta expresión coincide con la correspondiente constante dada en [4] para el caso particular en que  $H_4 = 0$  y  $H_5 = 1$ . Resulta entonces conveniente utilizar la siguiente parametrización

$$H_1 - \epsilon H_5 = -J \cos(\vartheta), \quad H_2 - \epsilon H_4 = J \sin(\vartheta).$$

Con lo que de las ecuaciones (9) se sigue que

$$\dot{H}_1 = J \sin(\vartheta) \dot{\vartheta} = (H_2 - \epsilon H_4) H_3,$$

y por tanto  $\dot{\vartheta} = H_3$ . Pero nuevamente de las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{\vartheta} = H_1 H_4 - H_2 H_5 = -J(\cos(\vartheta) H_4 + \sin(\vartheta) H_5),$$

así que con  $H_4 = \sin(\theta_0)$  y  $H_5 = \cos(\theta_0)$  se obtiene que

$$\ddot{\vartheta} = -J \sin(\vartheta + \theta_0), \quad (11)$$

que es esencialmente la ecuación de un péndulo cuyo ángulo de inclinación es medido desde un valor  $\theta_0$ , por ejemplo desde la dirección normal a un plano inclinado fijo.

## 7.5. El péndulo y las integrales elípticas

La manera más natural y sencilla de introducir las funciones elípticas es mediante el análisis del movimiento de un péndulo simple de longitud  $l$ . Si  $\hat{A}P = \xi$ , la ecuación de movimiento del péndulo será:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -g \sin \frac{\xi}{l}, \quad (12)$$

es decir,

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta, \quad (13)$$

que es la ecuación (11) para  $J = g/l$  y  $\theta_0 = 0$ , y el tiempo igual a la longitud de arco  $s$ , en donde  $\theta$  es el ángulo que forma el péndulo con respecto a la vertical.

El Hamiltoniano (8) queda expresado como

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \epsilon - J \cos(\theta),$$

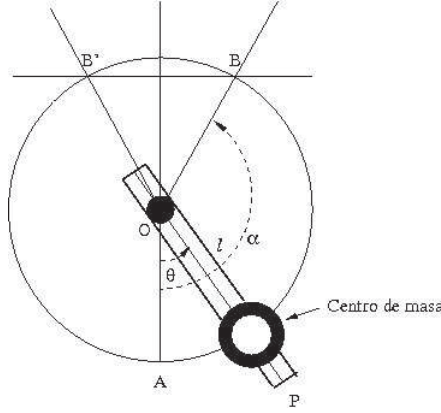


Figura 7.3: Péndulo simple

para  $\theta = \theta_0$ , en donde el primer término es la energía cinética y los dos siguientes términos son la energía potencial. Denotemos al ángulo de oscilación  $\widehat{BOA} \widehat{AOB'}$  por  $2\alpha$ . Para obtener el valor de la constante observemos que, para  $\theta = \alpha$ ,  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ , tenemos  $H - \epsilon = -J \cos \alpha$ , y  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = -J \cos \theta + J \cos \alpha$ , resultando

$$\frac{d\theta}{ds} = 2\sqrt{J} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (14)$$

de donde

$$\sqrt{J}s = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}. \quad (15)$$

Si hacemos  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\phi)$

$$\sqrt{J}s = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2(\phi)}}. \quad (16)$$

la cual se conoce como la *forma normal de la integral elíptica de primera especie*. Escribiendo  $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = k^2 = (H + J - \epsilon)/(2J)$ , y

$$\Delta(\phi, k) := \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)},$$

la integral  $\int \frac{d\phi}{\Delta k}$  se denota por  $F(\phi, k)$ ,  $\phi$  se llama la *amplitud*, y  $\kappa$  el *módulo*. Fue N. Abel quien observó la naturaleza inversa de esta función, denotando  $u = F(\phi, k)$  y sugiriendo el estudio de la amplitud  $\phi$  como función de  $u$ . La notación de Jacobi  $\phi = \text{am } u$  o bien  $\phi = \text{am}(u, k)$  nos lleva a las tres funciones elípticas de  $u$ :

$$\text{cn am } u = \cos \phi$$

$$\operatorname{sn} am u = \operatorname{sen} \phi$$

$$dn u = \Delta \phi$$

Así,

$$\operatorname{cn} u = \cos \phi$$

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sen} \phi$$

$$dn u = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi},$$

donde  $\phi$  es la función de  $u$  representada por  $am u$  y definida por

$$u = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\phi)}}$$

De lo cual obtenemos

$$\frac{d am u}{du} = \frac{d\phi}{du} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\phi)} = dn u$$

$$\frac{d cn u}{du} = \frac{d \cos \phi}{du} = -\operatorname{sen}(\phi) \frac{d\phi}{du} = -sn u dn u$$

$$\frac{d sn u}{du} = \frac{d \operatorname{sen} \phi}{du} = \cos \phi \frac{d\phi}{du} = cn u dn u$$

$$l \frac{d dn u}{du} = \frac{d \Delta \phi}{du} = -k^2 \frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos \phi}{\Delta \phi} \frac{d\phi}{du} = -k^2 sn u cn u$$

Las integrales elípticas se presentan comunmente en problemas Dinámica, por ejemplo en la ecuación de las fuerzas

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = X,$$

teniéndose

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

cuando  $X$  es un polinomio de tercero o de cuarto grado. La integral anterior se llama *integral elíptica de primera especie*. Si hacemos  $x = sn u$  en las expresiones que obtuvimos para las derivadas de las funciones elípticas, y utilizamos las relaciones

$$cn^2 u = 1 - sn^2 u, \quad dn^2 u = 1 - k^2 sn^2 u,$$

obtenemos  $u = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $dn u = \sqrt{1 - k^2 x^2}$  y  $\frac{dx}{du} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$ , de lo cual resulta

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - k^2 x^2}} = u = sn^{-1}(x, k)$$

Análogamente, si  $x = cn u$ ,  $\frac{dx}{du} = -\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2 x^2)}$ , en donde  $\kappa + \kappa' = 1$ , teniéndose

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2 + k^2 x^2)}} = u = cn^{-1}(x, k)$$

Y, si  $x = dn u$ , se tiene  $k sn u = \sqrt{(1-x^2)}$  y  $k cn u = \sqrt{(x^2 - k'^2)}$ , por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2 - k'^2)}} = u = dn^{-1}(x, k).$$

Finalmente, reemplazando  $x$  por  $\text{sen } u$ ,  $\cos u$  y  $\Delta\phi$ , resulta

$$\begin{aligned} Jt = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}} &= u = F(\phi, k) = am^{-1}(\phi, k) \\ &= sn^{-1}(\phi, k) = cn^{-1}(\phi, k) = dn^{-1}(\phi, k) \end{aligned}$$

respectivamente, tal que  $\phi = am u$ ,  $\cos \phi = cn u$ ,  $\text{sen} \phi = sn u$  y  $\Delta\phi = dn u$ .

Mencionemos que en el problema de la rectificación de una elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , haciendo  $x = a \cos \phi$ ,  $y = \text{sen} \phi$ , tenemos

$$\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2 = a^2 \cos^2 \phi + b^2 \text{sen}^2 \phi = a^2(1 - e^2 \text{sen}^2 \phi)$$

con lo cual

$$\frac{s}{a} = \int_0^\phi \sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \phi} d\phi = \int \Delta\phi d\phi = \int dn^2 u du.$$

Haciendo la sustitución  $\phi = am(u, e)$ , estamos considerando la excentricidad  $e$  de la elipse como el módulo  $k$ . La integral resultante

$$\int \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} d\phi = \int \Delta(\phi, k) d\phi$$

se conoce como *integral elíptica de segunda especie*, y es denotada, según Legendre, por  $E(\phi, k)$ .

## 7.6. Elásticas en el plano Euclideo

Aquí  $\epsilon = 0$  y las superficies integrales son el paraboloides

$$\frac{1}{2} H_3^2 + H_4 H_2 + H_5 H_1 - H = 0,$$



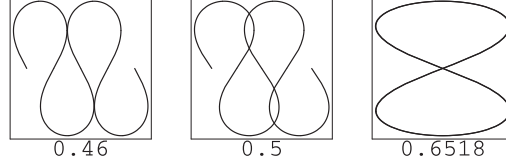


Figura 7.4: Caso límite de Bernoulli y deformaciones

y los cilindros

$$\begin{aligned} H_1^2 + H_2^2 - C &= 0, \quad C > 0, \\ H_4^2 + H_5^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Las curvas elásticas normales se obtienen usando  $\kappa = H_3$  para resolver las ecuaciones del marco móvil (4)

$$\dot{\alpha}_3 = -H_4\alpha_1 + H_5\alpha_2, \quad \dot{\alpha}_1 = -\kappa\alpha_2, \quad \dot{\alpha}_2 = \kappa\alpha_1. \quad (17)$$

Dado que podemos utilizar la parametrización  $H_4 = -\sin(\theta_0)$  y  $H_5 = \cos(\theta_0)$  y que  $\|\alpha_3\|_0 = 1$ , resulta natural proponer a los vectores unitarios en la norma  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_3 &= (\cos(\theta + \theta_0), \sin(\theta + \theta_0), 0)^t \\ \alpha_1 &= (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)^t \\ \alpha_2 &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)^t, \end{aligned}$$

con  $\kappa = \dot{\theta}$  y  $\theta = \vartheta$ . Las curvas elásticas en el plano se obtienen finalmente integrando a  $\dot{\alpha}_3$ . Para este caso,  $\epsilon = 0$ , el parámetro  $d := 2k^2 - 1$  permite clasificar las curvas elásticas por su módulo (ver la sección del péndulo).

Un hecho notable, en relación con las curvas elásticas en  $R_2$ , es que L. Euler, en su artículo *Sobre las curvas elásticas* construye las curvas elásticas mediante cuadraturas, es decir integra las ecuaciones que resultan de aplicar su *método de máximos y mínimos*, de tal manera que realiza las gráficas con una asombrosa precisión no lograda por la comunidad científica, sino hasta hace pocos años con la ayuda de las computadoras. La clasificación de las curvas elásticas se realiza por medio del parámetro  $k$ . Hay 9 especies de elásticas, dentro de las cuales se encuentran 5 casos límite aislados: el círculo, la figura de ocho, la elástica rectangular y el bucle con una asíntota.

## 7.7. Elásticas en la esfera

Ahora  $\epsilon = 1$  y resultan las superficies integrales dadas nuevamente por el paraboloido

$$\frac{1}{2}H_3^2 - H_4H_2 - H_5H_1 - H = 0,$$

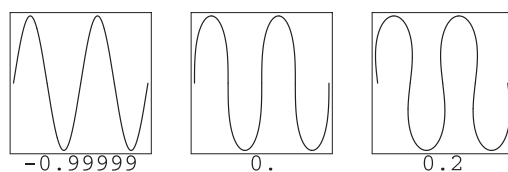
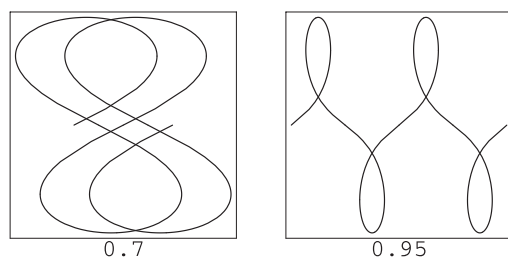
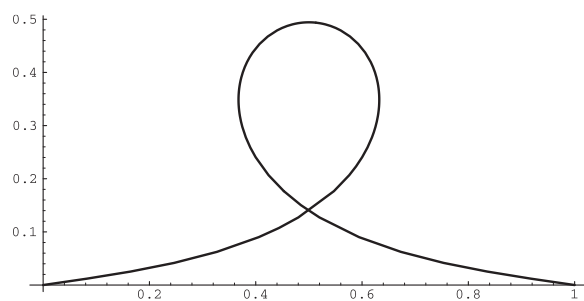
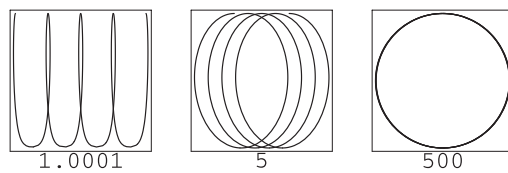
Figura 7.5: Caso límite  $d=0$  y deformacionesFigura 7.6:  $d < 1$  y deformacionesFigura 7.7: Caso límite  $d=1$ 

Figura 7.8: Caso límite el círculo y deformaciones

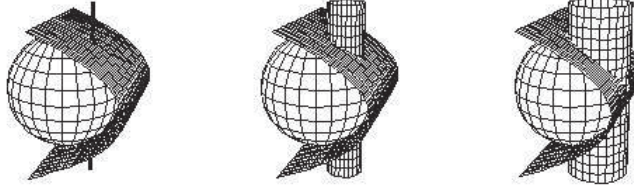


Figura 7.9: El eje del cilindro atravieza la esfera

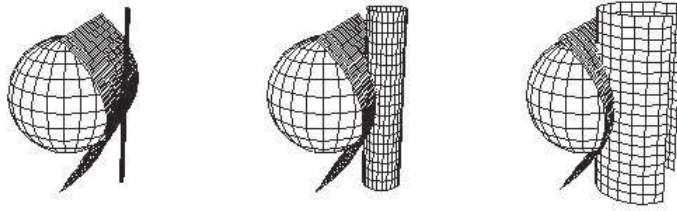


Figura 7.10: El eje del cilindro solo toca a la esfera

y en este caso por la esfera

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - C = 0, \quad C > 0,$$

y el cilindro

$$H_4^2 + H_5^2 - 1 = 0.$$

A continuación se muestran las superficies integrales en el espacio cotangente para la esfera

Nótese que el cilindro es la superficie integral en el el análogo cinético de Kirchhoff. vskip 0.3cm

Las ecuaciones del marco móvil son

$$\dot{\alpha}_3 = -H_4\alpha_1 + H_5\alpha_2, \quad \dot{\alpha}_1 = -\kappa\alpha_2 + H_4\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = \kappa\alpha_1 - H_5\alpha_3. \quad (18)$$

El caso particular  $C = 0$  conduce a un meridiano de la esfera unitaria como puede demostrarse notando que en tal situación  $H_3 = 0 = \kappa$ . Dado que el vector de posición de la esfera unitaria coincide con el vector normal a ésta en dicho punto, resulta obvia la parametrización

$$\alpha_3 = (\sin(\theta) \cos(\phi - \phi_0), \sin(\theta) \sin(\phi - \phi_0), \cos(\theta))^t.$$

Para simplificar la notación consideremos el caso  $\theta_0 = 0$ , esto es,  $H_4 = 1$  y  $H_5 = 0$ . Recordemos ahora la parametrización de elementos  $g \in SO_3$  en términos de ángulos de Euler

$$g = e^{\phi L_3} e^{\theta L_2} e^{\psi L_3},$$

por lo tanto la matriz  $g$  tiene los siguientes vectores columna

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) \\ -\sin(\theta)\cos(\psi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi)\cos(\psi) - \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) \\ \sin(\theta)\sin(\psi) \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, de la primer ecuación de (18), debemos tener  $\dot{\alpha}_3 = \alpha_1$ , por lo que de la tercer coordenada se sigue que

$$\dot{\theta} = \cos(\psi).$$

Pero para la primer coordenada tenemos que

$$-\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) = \dot{\theta}\cos(\phi)\cos(\theta) - \dot{\phi}\sin(\theta)\sin(\phi),$$

por lo que

$$\sin(\psi) = \dot{\phi}\sin(\theta), \quad \text{y entonces} \quad \dot{\phi} = \pm \frac{\sin(\psi)}{\sin(\theta)}.$$

De las ecuaciones para la tercer coordenada de  $\dot{\alpha}_1$  y  $\dot{\alpha}_2$  se sigue que

$$\dot{\psi} = \kappa - \sin(\psi) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Las demás ecuaciones son identidades equivalentes. Solo resta relacionar por tanto a la curvatura  $\kappa = H_3$  con estos ángulos. Para ello recordemos que la superficie integral  $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = C$  es también una esfera y que las ecuaciones del movimiento

$$\dot{H}_1 = (H_2 - H_4)H_3, \quad \dot{H}_2 = (-H_1 + H_5)H_3, \quad \dot{H}_3 = H_1H_4 - H_2H_5,$$

las podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_4 \\ -H_3 & 0 & H_5 \\ H_4 & -H_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix},$$

Si ahora definimos  $\hat{P} = (H_1, H_2, H_3)^t$  tendremos que

$$\frac{d\hat{P}}{ds} = -(H_4 L_2 + H_5 L_1 + H_3 L_3) \hat{P} = -g^{-1} \frac{dg}{ds} \hat{P},$$

por lo que

$$\frac{d}{ds} g \hat{P} = 0, \quad \text{así que} \quad g \hat{P} = V, \quad \hat{P} = g^t V,$$

en donde  $V$  es un vector constante con magnitud  $\sqrt{C}$ . En particular eligiendo  $V = \sqrt{C} e_3$  tendremos que

$$H_1 = -\sqrt{C} \sin(\theta) \cos(\psi), \quad H_2 = \sqrt{C} \sin(\theta) \sin(\psi), \quad H_3 = \sqrt{C} \cos(\theta).$$

Ahora como  $H_3 = \kappa$  es una función elíptica conocida, en términos de ella sabemos que  $\cos(\theta) = \kappa/\sqrt{C}$  y que  $\sin(\theta) = \pm\sqrt{1 - \kappa^2/C}$ , por lo que

$$H_1 = \mp\sqrt{C - \kappa^2} \cos(\psi), \quad H_2 = \pm\sqrt{C - \kappa^2} \sin(\psi), \quad H_3 = \kappa.$$

La curva elástica está dada por

$$\alpha_1 = \sqrt{1 - \kappa^2/C} \cos(\phi), \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \kappa^2/C} \sin(\phi), \quad \alpha_3 = \kappa/\sqrt{C}.$$

## 7.8. Elásticas en el plano hiperbólico

Ahora  $\epsilon = -1$  y tenemos a las superficies integrales dadas por el paraboloide

$$\frac{1}{2} H_3^2 + H_4 H_1 + H_5 H_2 - H = 0,$$

y en este caso por el hiperboloide

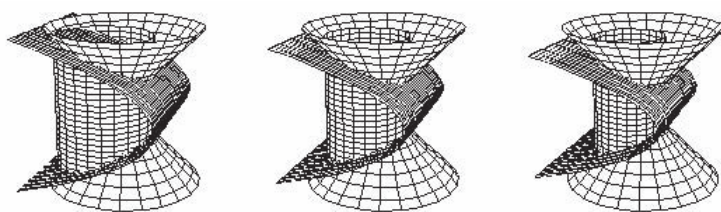
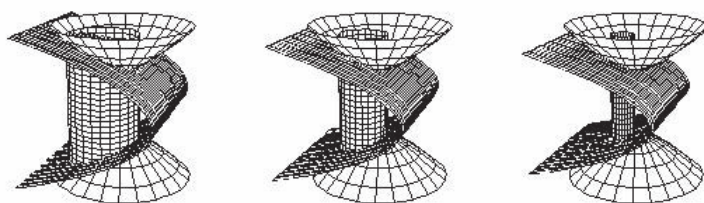
$$H_1^2 + H_2^2 - H_3^2 - C = 0,$$

de dos hojas para  $C > 0$ , llamado *caso compacto*, de una sola hoja para  $C < 0$  que llamamos *caso no compacto*, o bien un cono doble para  $C = 0$  y el cilindro

$$H_4^2 + H_5^2 - 1 = 0.$$

Mostramos aquí las superficies integrales del caso hiperbólico.

Constatamos que aparece de nuevo el cilindro, pues el análogo cinético es también válido aquí.

Figura 7.11:  $C=0$ Figura 7.12:  $C < 0$ Figura 7.13:  $C > 0$

Las ecuaciones del marco móvil son

$$\dot{\alpha}_3 = -H_4\alpha_1 + H_5\alpha_2, \quad \dot{\alpha}_1 = -\kappa\alpha_2 + H_4\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = \kappa\alpha_1 + H_5\alpha_3. \quad (19)$$

Consideremos primeramente el caso compacto, esto es para  $C < 0$ . Utilizaremos la parametrización

$$g = e^{\phi L_3} e^{\theta L_2} e^{\psi L_3},$$

de donde obtenemos los siguientes vectores columna para la matriz  $g$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cosh(\theta)\cos(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cosh(\theta)\cos(\psi) \\ -\sinh(\theta)\cos(\psi) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\phi)\cos(\psi) - \cos(\phi)\cosh(\theta)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cosh(\theta)\sin(\psi) \\ \sinh(\theta)\sin(\psi) \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} \sinh(\theta)\cos(\phi) \\ \sinh(\theta)\sin(\phi) \\ \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

Recordemos las ecuaciones del movimiento

$$\dot{H}_1 = (H_2 + H_4)H_3, \quad \dot{H}_2 = (-H_1 - H_5)H_3, \quad \dot{H}_3 = H_1H_4 - H_2H_5,$$

las podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ -\dot{H}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_4 \\ -H_3 & 0 & H_5 \\ -H_4 & H_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ -H_3 \end{pmatrix},$$

Si aquí definimos  $\hat{P} = (H_1, H_2, -H_3)^t$  tendremos que

$$\frac{d\hat{P}}{ds} = -(H_4L_2 + H_5L_1 + H_3L_3)\hat{P} = -g^{-1}\frac{dg}{ds}\hat{P},$$

por lo que

$$\frac{d}{ds}g\hat{P} = 0, \quad \text{así que} \quad g\hat{P} = V, \quad \hat{P} = g^{-1}V,$$

en donde  $V$  es un vector constante tal que  $\|V\|_{-1} = \sqrt{-C}$  (nótese que en el grupo  $SO(1, n)$  no se cumple la igualdad  $g^{-1} = g^t$ , como en los grupos  $\mathbb{R}_n \ltimes SO_n$  y  $SO_{n+1}$ ). En particular eligiendo  $V = \sqrt{-C}e_3$  tendremos que

$$H_1 = -\sqrt{-C}\sinh(\theta)\cos(\psi), \quad H_2 = \sqrt{-C}\sinh(\theta)\sin(\psi), \quad H_3 = \sqrt{-C}\cosh(\theta). \quad (20)$$

Ahora como  $H_3 = \kappa$  es una función elíptica conocida, en términos de ella sabemos que  $\cosh(\theta) = \kappa/\sqrt{-C}$  y que  $\sinh(\theta) = \pm\sqrt{-1 - \kappa^2/C}$ , por lo que

$$H_1 = \mp\sqrt{C + \kappa^2} \cos(\psi), H_2 = \pm\sqrt{C + \kappa^2} \sin(\psi), H_3 = \kappa.$$

La curva elástica está dada por

$$\alpha_{31} = \sqrt{-1 - \kappa^2/C} \cos(\phi), \alpha_{32} = \sqrt{-1 - \kappa^2/C} \sin(\phi), \alpha_{33} = \kappa/\sqrt{-C}. \quad (21)$$

Para el caso no compacto  $C > 0$  es conveniente utilizar la siguiente parametrización

$$g = e^{\phi L_1} e^{\theta L_2} e^{\psi L_3}$$

al igual que en los casos anteriores, obtenemos los siguientes vectores columna para  $g$

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi) \cosh(\theta) \\ \cosh(\phi) \sin(\psi) + \cos(\psi) \sinh(\phi) \sinh(\theta) \\ \sinh(\phi) \sin(\psi) - \cosh(\phi) \cos(\psi) \sinh(\theta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\cosh(\theta) \sin(\psi) \\ \cosh(\phi) \cos(\psi) - \sinh(\phi) \sin(\psi) \sinh(\theta) \\ \cos(\psi) \sinh(\phi) + \cosh(\phi) \sin(\psi) \sinh(\theta) \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$\begin{pmatrix} \sinh(\theta) \\ -\cosh(\theta) \sinh(\phi) \\ -\cosh(\theta) \sinh(\phi) \\ \cosh(\phi) \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dado que, nuevamente, se sigue de las ecuaciones del movimiento que  $g\hat{P}$  es una constante  $V$ , elegimos ahora a esta constante como  $V = \sqrt{C} e_1$ , para obtener

$$H_1 = \sqrt{C} \cos(\psi) \cosh(\theta), H_2 = -\sqrt{C} \cosh(\theta) \sin(\psi), H_3 = \sqrt{C} \sinh(\theta). \quad (22)$$

Por lo que ahora

$$\sinh(\theta) = f(z + \omega) = f(z)ac\kappa\sqrt{C}, \quad \cosh(\theta) = \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{C}}, \quad (23)$$

y

$$H_1 = \sqrt{C + \kappa^2} \cos(\psi), H_2 = -\sqrt{C + \kappa^2} \sin(\psi), H_3 = \kappa.$$



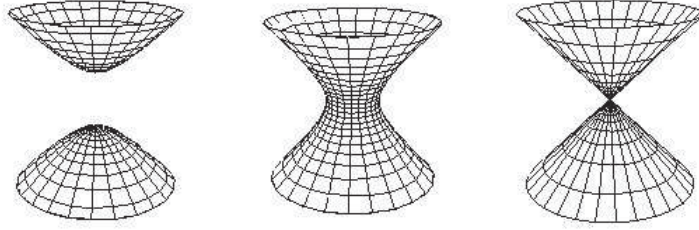


Figura 7.14: Mallas coordenadas en el espacio cotangente

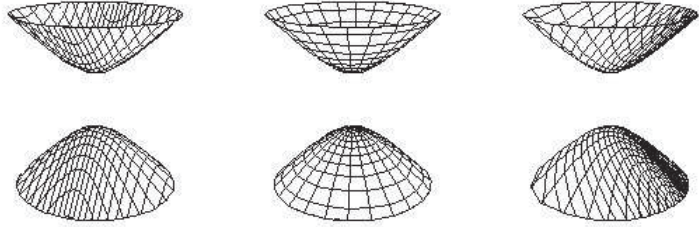


Figura 7.15: Mallas coordenadas en el espacio cotangente

La curva elástica se encuentra expresada como

$$\alpha_1 = \frac{\kappa}{\sqrt{C}}, \alpha_2 = -\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{C}} \sinh(\phi), \alpha_3 = \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{C}} \cosh(\phi). \quad (24)$$

Para finalizar consideremos el caso del *cono de luz* con  $C = 0$ . Ahora es conveniente utilizar

$$g = e^{(-L_1 - L_3)\phi} e^{L_2\theta} e^{L_3\psi},$$

que en nuestro caso conduce a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \begin{pmatrix} -\phi \sin(\psi) - \frac{1}{2} \cos(\psi)((-2 + \phi^2) \cosh(\theta) + \phi^2 \sinh(\theta)) \\ -\phi \cos(\psi) \cosh(\theta) - \sin(\psi) - \phi \cos(\psi) \sinh(\theta) \\ -\phi \sin(\psi) - \frac{1}{2} \cos(\psi)(\phi^2 \cosh(\theta) + (2 + \phi^2) \sinh(\theta)) \end{pmatrix}, \\
\alpha_2 &= \begin{pmatrix} \phi \cos(\psi) - \frac{1}{2} \sin(\psi)((-2 + \phi^2) \cosh(\theta) + \phi^2 \sinh(\theta)) \\ \cos(\psi) - \phi \cosh(\theta) \sin(\psi) - \phi \sin(\psi) \\ \phi \cos(\psi) - \frac{1}{2} \sin(\psi)(\phi^2 \cosh(\theta) + (2 + \phi^2) \sinh(\theta)) \end{pmatrix}, \\
\alpha_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\phi^2 \cosh(\theta) + (-2 + \phi^2) \sinh(\theta)) \\ \phi(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \\ \frac{1}{2}((2 + \phi^2) \cosh(\theta) + \phi^2 \sinh(\theta)) \end{pmatrix} \quad (25)
\end{aligned}$$

Para  $g \hat{P} = V$  conviene utilizar al vector  $V = -e_1 - e_3$ , con lo que

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\cos(\psi)(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)), \\
H_2 &= -\sin(\psi)(\cosh(\theta) + \sinh(\theta)), \\
H_3 &= \cosh(\theta) + \sinh(\theta). \quad (26)
\end{aligned}$$

Con lo que

$$H_1 = -\cos(\psi)\kappa, \quad H_2 = -\sin(\psi)\kappa, \quad H_3 = \kappa,$$

y además  $\cosh(\theta) = (\kappa^2 + 1)/(2\kappa)$  y  $\sinh(\theta) = (\kappa^2 - 1)/(2\kappa)$ . La curva elástica está dada por

$$\alpha_3 = \left( \frac{\kappa}{2} \phi^2 - \sinh(\theta), \phi\kappa, \cosh(\theta) + \frac{\kappa}{2} \phi^2 \right)^t.$$

En la figura (7.15) mostramos en el espacio cotangente al hiperboloide de dos hojas, al de una hoja y de una hoja de cono doble, en las coordenadas (20), (22) y (26), respectivamente.

En la figura (7.14) observamos al hiperboloide de dos hojas del espacio cotangente, en las coordenadas para  $\alpha_3$  dadas por las ecuaciones (21), (24) y (25).

# Bibliografía

- [1] BRYANT R. AND P. GRIFFITHS, Reduction for constrained variational problems and  $\int \kappa^2 ds$ , *Amer. J. Math.* **108** (1986), 525-570.
- [2] CARTAN H., *Differential Forms*, Hermann, Paris (1970).
- [3] EULER LEONHARD, *Método de máximos y mínimos. Selección del Methodus, con introducción, traducción, notas y apéndice. Dou Albert*, Publicaciones de la Universitat Autònoma de Barcelona (1993).
- [4] JURDJEVIC V., Noneuclidean Elastica, *American Journal of Mathematics*, **117**, pp. 93-124, (1995).
- [5] JURDJEVIC V., *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [6] JURDJEVIC V. AND MONROY-PÉREZ F. Variational Problems on Lie Groups and their Homogeneous Spaces: Elastic Curves, Tops, and Constrained Geodesic Problems in *Nonlinear Geometric Control Theory and his Applications*, Anzaldo-Meneses, A. Bonnard, B., Gauthier, J.P. and Monroy-Pérez F., World Scientific Publishing Co. (2002), 3-76.
- [7] LANGER J. AND SINGER D. , *The total squared curvature of closed curves*, *J. Differential Geom.* **20** (1984), 1-22
- [8] LINNÉR A., *Explicit Elastic Curves*, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **16**, pp. 445-475, 1998.
- [9] LOVE A.E., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, reimpresión de la cuarta edición de 1927.
- [10] SACHKOV, YURI L., *Maxwell strata in Euler's elastic problem* SISSA 04/2007/M (January 15h 20079).



## Capítulo 8

# El método de los máximos y los mínimos

H. N. Núñez Yépez <sup>1</sup> y A. L. Salas Brito <sup>2</sup>

### Resumen

Describimos la contribución de Euler al cálculo de variaciones o método de los máximos y los mínimos, como él le llamó. Discurremos sobre la forma en que se le empleó para formular las ecuaciones de la dinámica usando del principio de mínima acción. Fundamentamos este principio en la descripción funcional de la mecánica cuántica. Introducimos y explicamos algunas ideas básicas del cálculo funcional, desde la definición de derivada hasta las series de potencias funcionales.

### 8.1. Introducción

*... se puede decir que aquel que actúa con perfección lo hace [...] como un autor talentoso que encierra la mayor cantidad de situaciones en el menor espacio posible <sup>3</sup> ...*

---

<sup>1</sup>Departamento de Física, Área de Mecánica, UAM-Iztapalapa, [nyhn@xanum.uam.mx](mailto:nyhn@xanum.uam.mx)

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, Área de Física Teórica y Materia Condensada  
UAM-Azcapotzalco, [asb@correo.azc.uam.mx](mailto:asb@correo.azc.uam.mx)

<sup>3</sup>La responsabilidad de la traducción al español de todas las citas textuales en este capítulo corresponde únicamente a los autores.

Gottfried Willhelm Leibnitz, 1686.

Leonhard Euler fue un científico notable por su fecunda contribución a la ciencia y por su producción escrita incomparable tanto en cantidad como en calidad. Destacó tanto en la matemática como en la física—por no hablar de la ingeniería naval, la botánica, la teoría musical, y otras ciencias aplicadas. A guisa de ejemplo mencionamos que una de las primeras publicaciones de Euler trató sobre el mejor lugar para situar mástiles en un buque: *Meditationes super problemate nautico, quod illustrissima regia Parisiensis academia scientiarum proposuit*, o, en español, *Consideraciones sobre un problema náutico propuesto por la ilustre real academia de ciencias de París*, trabajo publicado en *Piece qui a remporté le prix de l'academie royale des sciences 1727*, París, 1728, pp. 1-48. Euler también inició el estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos en su *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (o, en español, *Teoría del movimiento de los cuerpos rígidos*) publicado en 1765. Actualmente se le considera más como un matemático aunque, como ocurre con muchos científicos de su tiempo, era un universalista que podría ser clasificado como físico o aún como ingeniero [1].

Con tales antecedentes, creemos que Euler no hubiera desdeñado del todo suscribir la caracterización que se ha hecho de la matemática como la parte de la física en la que los experimentos son siempre baratos. Esta afirmación, con la que muy pocos matemáticos contemporáneos están de acuerdo, es de V. I. Arnold, destacado matemático ruso.<sup>4</sup>

Más aún, desarrollos recientes en la teoría de la información parecieran apoyar la afirmación de Arnold, la teoría de la información se desarrolló bajo la hipótesis [2] —muy razonable a principios de siglo XX— de que se la podía tratar sin relación alguna con la naturaleza; en forma similar a como los griegos concibieron a la geometría, la que, según las investigaciones de Einstein,<sup>5</sup> está determinada por el contenido material del universo. Así la geometría podría ser considerada parte de la física.

La información tampoco se puede concebir independientemente del medio que la

<sup>4</sup>Vladimir Igorevich Arnold, nacido en Odessa, Ucrania, URSS, el 12 de junio de 1937. Uno de los matemáticos contemporáneos más prolíficos. Conocido principalmente por el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser que se refiere a la estabilidad de sistemas hamiltonianos integrables. Ha hecho aportaciones importantes a la topología, a la geometría algebraica, a la teoría de los sistemas dinámicos, y a la teoría de singularidades. Su primera contribución, en 1957, fue resolver el treceavo problema de Hilbert que pregunta si será posible construir la solución de la ecuación general de séptimo grado empleando un número finito de funciones de dos variables. Arnold demostró que bastan sólo dos para hacerlo. La cita se la puede encontrar, con el contexto en que fue propuesta, en: <http://pauli.uni-muenster.de/~munst-teg/arnold.html>.

<sup>5</sup>Albert Einstein (Ulm Alemania, 14 de marzo de 1879 — Princeton EUA, 18 de abril de 1955), físico teórico de ascendencia alemana. Uno de los científicos más importantes y conocidos del siglo XX. Descubrió la constancia de la rapidez de la luz, lo que le permitió resolver todos los problemas que tenía la física del siglo XIX generados debido a la aceptación de las ecuaciones del electromagnetismo. Descubrió también la profunda liga que existe entre gravitación y movimiento acelerado, hecho que lo llevó a la *relatividad general*; teoría que, al relacionar la geometría tetradimensional del universo (1 dimensión temporal + 3 dimensiones espaciales) con su contenido de materia, permite estudiarlo como un todo.

sustente. Su tratamiendo va a depender, entonces, del comportamiento de éste. Pero, hacemos notar que esto no tiene necesariamente implicaciones sobre la forma en que el campo de estudio debe concebirse, sólo quiere decir que si nos preocupa su *uso*, entonces se le debe estudiar como parte de las ciencias naturales [3].<sup>6</sup>

Euler tenía una memoria prodigiosa y un gran talento para aprender lenguajes — recitaba de memoria y en latín obras del gran poeta romano Virgilio,<sup>7</sup> además hablaba ruso, alemán, latín, hebreo, griego, italiano y francés— e introdujo muchas ideas y métodos nuevos en la matemática, creando la notación que era necesaria para expresarlos. Todo lo eligió con tanto tino que la mayoría de sus propuestas notacionales aún se emplean. Entre sus logros está el haber establecido la famosa fórmula:  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , expresión que relaciona cinco de los números más importantes de la matemática; pero su aporte no se reduce a la pura expresión anterior o al haber introducido los símbolos  $e$  ( $\simeq 2,71828$ ) para denotar la base de los logaritmos naturales,  $\pi$  ( $\simeq 3,14159$ ) para denotar la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, e  $i$  para simbolizar al número tal que  $i^2 = -1$ . Euler fue uno de los primeros científicos que tomaron en serio a los números complejos, que antes de él eran considerados con suspicacia por la mayoría de los matemáticos [1].

Euler fue extraordinariamente prolífico, con una producción científica escrita que llega a los más de mil trabajos publicados, entre correspondencia, libros, artículos, y obras de divulgación. El historiador de la ciencia C. A. Truesdell<sup>8</sup> ha calculado que el 25 % de todo el trabajo científico publicado en el siglo XVIII fue escrito por Euler [4]. Su trabajo incluye contribuciones a la óptica, a la mecánica, a la artillería, al estudio del movimiento planetario, a la teoría de los números, a la teoría de las probabilidades, a la acústica, al desarrollo del análisis real y al del análisis complejo, al estudio de las series infinitas, al estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos, y al diseño y la construcción de buques.

Nuestro propósito en este capítulo será hacer un recuento de las contribuciones de Euler al cálculo de variaciones; las explicaremos, analizaremos su desarrollo en manos de Lagrange, las aplicaremos a la teoría cuántica haciendo uso de la formulación de Feynman, y mencionaremos someramente algunas concepciones contemporáneas sobre del cálculo funcional.

---

<sup>6</sup>Para establecer con más claridad nuestra posición al respecto, enfatizamos que, si bien puede ser necesario considerar el origen fáctico de la matemática, ésta *no* necesita considerarlo ni para avanzar y ni para desarrollarse. *La diferencia esencial entre la matemática y la ciencia es la relación con la naturaleza: la ciencia extrae su validez de ella, la matemática no la necesita.*

<sup>7</sup>Publio Virgilio Marón, (Pietole, 70 AC — Brindisi, 19 AC) poeta romano, autor de una muy diversa obra poética.

<sup>8</sup>Clifford Ambrose Truesdell (Los Ángeles EUA, 18 de febrero de 1919 — Baltimore EUA, 14 de enero de 2000), científico e historiador de la ciencia estadounidense. Profesor de mecánica racional en la Universidad John Hopkins, EUA desde 1961 hasta su jubilación en 1989. Recibió en dos ocasiones (1958 y 1983) la medalla Euler otorgada por la Academia de Ciencias de la URSS.

### 8.1.1. El principio de mínima acción.

*Que todas las cosas son buenas y [...] nada es imperfecto ...*

Platón, *Timeo*, ~ 310 AC.

Otro rasgo de la personalidad de Euler era su profunda religiosidad producto, a lo que podemos decir, de haber nacido en el seno de una familia de pastores protestantes de raigambre calvinista; el padre de Euler era eclesiástico y su madre provenía también de una familia de eclesiásticos. Tal vez su fe y sus intereses científicos encontraron un punto de convergencia en las investigaciones que dedicó a expresar ciertas acciones naturales como procesos en los que se minimizan los esfuerzos empleados. La naturaleza, o mejor aún, Dios, tal y como lo concebían Euler y otros científicos del siglo XVIII, opera con los medios más económicos y expéditos.

Según las concepciones religiosas eulerianas y de otros científicos de la época, nada se desperdicia o está equivocado en el mundo, porque nada puede desperdiciarse o equivocarse en un universo de por sí perfecto como debe serlo toda obra divina. Esta imagen de Euler sobre la perfección de la obra creada, en donde la voluntad de los seres humanos poco cuenta —la creación incluye, por supuesto, a la sociedad y a sus instituciones— lo convertía en un personaje políticamente conservador, y le causó agrias confrontaciones con su colega de la Academia de Berlín, François-Marie Arouet,<sup>9</sup> mejor conocido como Voltaire, su obra, *Cándido, o el optimista* [5] fue escrita para satirizar las ideas político-filosóficas de Euler, Leibnitz,<sup>10</sup> y de muchos otros científicos de la época; quiénes, al argüir la perfección de lo creado (*vivimos en el mejor de los mundos posibles*, según lo expresó Leibnitz), cerraban la puerta a cualquier posibilidad de cambio social o político. Tal vez debido a estas concepciones filosófico-religiosas Euler se interesó tanto en problemas del cálculo de variaciones. Pues, demostrar que la naturaleza se comporta en una forma que minimiza los esfuerzos, de alguna forma contribuiría a demostrar la perfección de la obra divina.

Euler inició el estudio del cálculo variacional, al que él llamó el *método de los máximos y de los mínimos*. El método fue desarrollado en forma mucho más conveniente por Lagrange, quién lo convirtió en un algoritmo que cualquiera con conocimientos de matemáticas avanzadas podía usar. Así, se le empleó, esencialmente por Lagrange aunque Euler también contribuyó, para formular variacionalmente la teoría del

<sup>9</sup>François-Marie Arouet (Paris Francia, 21 de noviembre de 1694 — Paris Francia, 30 de mayo de 1778), mejor conocido como Voltaire; famoso polemista y escritor francés. Publicó escritos incisivos en defensa de las libertades civiles y religiosas; fue partidario decidido del reformismo social, y un crítico acerbo de la iglesia católica y de las instituciones francesas de su tiempo.

<sup>10</sup>Gottfried Wilhelm Leibnitz (Leipzig Alemania, 1 de julio de 1646 — Hannover Alemania, 14 de noviembre de 1716) científico y filósofo racionalista, recordado por su visión optimista de la filosofía. Creó el cálculo infinitesimal independientemente de Newton; lo que lo llevó a mantener una agria controversia con éste y con sus partidarios sobre la paternidad de las ideas. La notación que introdujo para el desarrollo del cálculo es tan conveniente que aún se le emplea hoy en día. También inventó el sistema binario, en él que se basan casi todas las arquitecturas de computación actuales.



movimiento de una partícula. Hacemos notar que el concepto de *partícula*, que resultara muy importante para el desarrollo teórico de la mecánica, es de la invención de Euler; quién lo introdujo en el volumen 1 de su texto *Mechanica* publicado en 1736, en donde escribió las ecuaciones de la mecánica en una forma equivalente a  $m dv/dt = F(r, v)$ , con  $m$  la masa,  $r$  la posición,  $v$  la velocidad, y  $F$  la fuerza aplicada. Contribuyendo a expresar las ecuaciones de la dinámica en la forma que resulta familiar actualmente. Euler convirtió así la resolución de un problema mecánico en una simple (¿?) aplicación del cálculo; ofreciendo una alternativa muy conveniente sobre los métodos, mayormente geométricos, que usó Newton.

Debemos mencionar también que, haciendo gala de su bien ganada fama como educador, la exposición sistemática que dió a conocer y popularizó los métodos variacionales, es de Euler [6]. Es un tributo a su genio que las exposiciones del método variacional que se ofrecen en la mayoría de los textos actuales sigan la exposición original de Euler. Esto, por lo demás, es exactamente lo mismo que vamos a hacer aquí.

## 8.2. El método de los máximos y los mínimos.

*Los [...] matemáticos han reconocido de tiempo atrás que el método que se presenta aquí no es sólo extremadamente útil en el análisis, sino que también contribuye grandemente a la resolución de problemas físicos. ...*

Leonhard Euler, 1744.

El trabajo de Euler hizo avanzar en mucho al cálculo en el siglo XVIII. Uno de los aspectos que desarrolló fue el cálculo variacional, esto es, el cálculo en espacios funcionales. En esta sección vamos a introducir las ideas centrales del cálculo variacional y vamos a explicar su formulación contemporánea para fines aplicados. No presentaremos detalladamente lo que Euler desarrolló, sino el método variacional que propuso, independientemente de Euler, Lagrange él qué es metodológicamente muy superior. Sólo haremos un recuento esquemático del método de Euler. Si acaso están interesados en más detalles, pueden encontrar una exposición completa en el capítulo 6 del libro de Ríbnikov [7].

### 8.2.1. El método variacional de Euler.

Las ideas generales del método de Euler se pueden referir de manera muy sucinta [7].

Supongamos que de entre todas las curvas posibles definidas en el intervalo cerrado, esto es, que incluye a sus extremos,  $[x_0, x_1]$ ; es menester elegir una que extreme a la integral

$$I = \int_{x_0}^{x_1} Z(x, y, y') dx, \quad (1)$$

en donde  $y$  es una función de  $x$  y  $y'$  es su derivada. ¿Cómo decidir cuál es la curva apropiada? Euler trató de resolver el problema considerando aproximaciones poligonales a las curvas, con ello, logró sustituir las derivadas por diferencias finitas,  $y' = \Delta y / \Delta x$ ; esta estrategia le permitió transformar la integral (1) en una función

$$\mathcal{I}(y_0, y_1, \dots, y_n) \quad (2)$$

a la que, al ahora depender sólo de variables reales sin la intervención de integrales, pudo aplicarle las técnicas usuales de extremalización del cálculo diferencial ordinario. Con ello, pero después de muchos cálculos más, y diversas consideraciones que ya no expondremos, pero que vuelven farragosa a la propuesta, logra obtener la ecuación

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial Z}{\partial y'} \right) = 0, \quad (3)$$

que es la solución correcta del problema planteado. De lo anterior podemos colegir que, aunque Euler resolvió el problema, no lo hizo con un método que fuera ni muy asequible, ni fácilmente generalizable; por lo tanto, su método no fue adoptado generalmente. Se requirió del trabajo de Lagrange y de su elegante solución, pero, además, de la *exposición magistral* que de él hizo Euler, para que el método general del cálculo de variaciones fuera adoptado por la mayoría de los científicos. Estos desarrollos los explicamos a continuación.

### 8.2.2. El cálculo variacional.

Expliquemos primero cuál es la diferencia principal entre el cálculo usual y el cálculo variacional.

#### Extremalización de funciones.

El cálculo usual se aplica sobre funciones reales de variable real

$$f : R \rightarrow R. \quad (4)$$

Para minimizar una de estas funciones necesitamos encontrar un número,  $x_0$ , en el dominio de la función (el dominio de  $f$  es el conjunto sobre el cuál está definida la función, en este caso, el conjunto de los números reales,  $R$ ), cuyo valor bajo  $f$ ,  $f(x_0)$ , sea el más pequeño de todos los valores asociados a números que estén en un intervalo alrededor de  $x_0$ .<sup>11</sup> En este caso, ¡afortunadamente ya sabemos la respuesta! La condición que debe cumplir  $x_0$  para ser, efectivamente, un mínimo de  $f$  es

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = 0; \quad (5)$$

<sup>11</sup>No podemos dejar de mencionar que aún el uso de la notación  $f(x)$  para denotar la acción de una función es debido a Euler.

la notación con la barra vertical sólo nos indica que se debe evaluar la derivada en, precisamente, el punto  $x_0$ . En palabras, un número,  $x_0$ , corresponderá a un mínimo de una función, si la derivada de la función se anula para ese valor. Pero ello es la condición no sólo de mínimo, sino también la de máximo; para garantizar que  $x_0$  sea un mínimo, necesitamos además garantizar que la segunda derivada de la función sea positiva en ese mismo punto:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} > 0, \quad (6)$$

Para que  $x_0$  sea un máximo, también deberíamos saberlo, se debe cumplir que

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} < 0. \quad (7)$$

Lo que notamos enseguida es que minimizar y maximizar están íntimamente relacionados. Al menos la primera condición, la anulación de la derivada, se debe cumplir en ambos casos. Por eso, tanto a máximos como a mínimos se les conoce como puntos extremos de una función; y al proceso por el que se les encuentra se describe genéricamente como *extremalización* de la función. Por extensión, hablaremos también de extremalización de funcionales.

### El problema de extremalizar funcionales.

Lo que desarrollaron Euler y Lagrange se refiere a extremalizar no funciones reales de variable real, sino lo que podríamos llamar *funciones de variable funcional*, esto es, funciones cuyo argumento es a su vez una función; a estas funciones se les llama *funcionales*. Un ejemplo directo es la funcional que a cada curva rectificable (esto es, curvas a las que se les puede determinar su longitud) le asocia un número real, su longitud entre dos puntos,

$$\ell : \mathcal{D} \rightarrow R_0^+. \quad (8)$$

La funcional  $\ell$  tiene como dominio al espacio, que hemos llamado  $\mathcal{D}$ , de las funciones reales de variable real rectificables, y como contradominio a los números reales positivos más el cero,  $R_0^+$ . Ello, por supuesto, sólo quiere decir que a cada curva rectificable le asociamos un número real que no puede ser negativo,  $l$ , su correspondiente longitud,

$$l \equiv \ell[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{df}{dz} \right)^2} dz. \quad (9)$$

Deben notar que la curva de la que queremos saber la longitud entre los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , es la gráfica de la función  $f$ , en donde —por supuesto—  $y = f(x)$ . Minimizar la funcional  $\ell[f]$  es el problema clásico de descubrir la trayectoria más corta que une dos puntos cualesquiera del plano. Este problema sería, aún en la actualidad, un reto prácticamente irresoluble para un estudiante universitario típico que cursara

los primeros semestres de ingeniería o de ciencias; aunque seguramente sabría de antemano la respuesta, la trayectoria es la línea recta que une los puntos mencionados.

Hemos aprovechado para introducir la convención, muy usada por físicos teóricos, de usar paréntesis cuadrados para especificar la acción de una funcional sobre de una función. Reservando los paréntesis redondos para indicar la acción de una función, así, por ejemplo,  $g(x) = x^2$  describe la acción de la función  $g$ , mientras  $\ell[f]$  describe la acción de la funcional (9). Es claro que tal funcional asocia a cada función real de variable real,  $f$  (que suponemos rectificable), un número real,  $\ell$ , la longitud que tiene entre los puntos del plano  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .

Otros problemas de este mismo estilo se habían ya formulado en tiempos de Euler; por ejemplo, hallar una curva que pasase por dos puntos dados y que, al girar, generase una superficie de revolución que ofreciera la menor resistencia posible al movimiento a lo largo de su eje en un medio viscoso. Este problema fue propuesto por Newton y resuelto por él mismo en el Libro II de los *Principia* [8]; el problema de la braquistócrona, o sea, encontrar la curva que una dos puntos dados y tal que un cuerpo, bajo la acción única de la gravedad, la recorra en el menor tiempo posible; el problema de las geodésicas sobre de una superficie dada, lo cuál es preguntarse de nuevo por la curva de longitud mínima que une dos puntos, sólo que ahora no sobre el plano, sino sobre una superficie curva. Otros problemas de extremalización habían sido planteados por Leibnitz, Maupertuis,<sup>12</sup> Fermat<sup>13</sup> y otros; todos fueron resueltos durante el siglo XVIII.

Los métodos de resolución que se propusieron eran, sin embargo, demasiado específicos para cada problema. Saltaba a la vista el que faltaba desarrollar un método general para resolverlos que no requiriese de las características particulares de ninguno. Esto es lo que Euler y Lagrange (¡a los 19 años!), consiguieron.

### 8.2.3. La resolución general de problemas variacionales.

Los problemas clásicos acerca de curvas con un perímetro dado, por ejemplo, ¿cuál es la forma de la curva, con longitud dada, que encierra la mayor área posible?, el problema de la braquistócrona en un medio viscoso, y la teoría de las geodésicas eran problemas que habían ocupado mucho del tiempo de Euler desde el principio de su carrera científica; todos ellos le habían sido sugeridos como tarea escolar por su men-

<sup>12</sup>Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (Saint-Malo Francia, 17 de julio de 1698 — Basilea Suiza, 27 de julio de 1759) matemático, escritor y filósofo francés. Se le considera el originador del principio de mínima acción.

<sup>13</sup>Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne Francia, 17 de agosto de 1601 — Castres Francia, 12 de enero de 1665), matemático —aunque trabajó toda su vida como abogado— francés que hizo importantes contribuciones al desarrollo del cálculo, a la geometría, a la probabilidad y a la teoría de los números. Su famosa conjetura, conocida como *el último teorema de Fermat*, de que la ecuación  $a^n + b^n = c^n$  no se puede cumplir por números enteros  $a$ ,  $b$ , y  $c$  si  $n > 2$ , fue finalmente demostrada por el matemático inglés Andrew Wiles entre 1994 y 1995.

tor, Johann Bernoulli.<sup>14</sup> El resolverlos condujo a Euler a una primera formulación del cálculo de variaciones, ideas que expuso en el texto *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, o, en español, *Un método para encontrar curvas que satisfagan propiedades de mínimo o de máximo, o la solución de problemas isoperimétricos en el sentido más amplio*, publicado en *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 6, 1738, pp. 123-155, en el artículo posterior *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*,<sup>15</sup> publicado en *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, 1741, pp. 159-190, y en varios trabajos más que publicó a lo largo del tiempo.<sup>16</sup> Debemos precisar que el desarrollo completo de la técnica del cálculo de variaciones se debe a Lagrange, quién lo publicó en 1759. El método de Lagrange fue detalladamente explicado en el libro que sobre el cálculo integral publicó Euler [6].

Hacemos notar que la presentación de Euler aún se emplea en los textos actuales; como también la empleamos nosotros a continuación.

### Extremalización de funcionales.

Euler tuvo siempre en mente funcionales de la forma (9), a las que podemos expresar en forma muy general como

$$F[g] = \int_{x_1}^{x_2} \Lambda(f(z), f'(z), z) dz. \quad (10)$$

Hemos supuesto que  $\Lambda$  es una función que depende de la función  $f$ , de su derivada  $f'$ , y de la variable de integración,  $z$ .

Ahora nos debemos preguntar, ¿qué significa extremalizar una expresión como la (10)?

Para responder a ello, pensemos en el cálculo elemental, ¿qué significa allí el extremalizar una función? Cuando una función ordinaria tiene un mínimo o un máximo en  $x_0$ , ello quiere decir que si nos apartamos de  $x_0$  una cierta distancia  $\delta x$ , el valor de la función no cambia en primera aproximación; esto significa que el cambio en la función es de segundo orden (es cuadrático) en la cantidad  $\delta x$ . En cualquier otro lugar de la curva, que no corresponda a un extremo, el valor de la función si cambiará en primera aproximación. Pero si estamos exactamente en un punto correspondiente a un valor extremo, cualquier pequeño desplazamiento no producirá diferencia alguna en el valor de la función si se le calcula a primera aproximación, pero cambiará su

<sup>14</sup>Johann Bernoulli (Basilea, Suiza 27 de julio de 1667 — Basilea, Suiza 1 de enero de 1748), matemático suizo, hermano de Jakob Bernoulli, padre de Daniel Bernoulli y de Nicolaus II Bernoulli. Contribuyó a la formación Leonhard Euler actuando como su tutor en asuntos científicos.

<sup>15</sup>O, en español, *Un método nuevo y fácil para encontrar curvas que satisfagan propiedades de máximo o de mínimo*.

<sup>16</sup>Los trabajos de Euler sobre de el tema están disponibles en la página electrónica: <http://math.dartmouth.edu/~euler/>.

valor si se le calcula a segundo orden en  $\delta x$ . Esto es una buena caracterización general de un valor extremo, que nos será útil para guiar nuestra discusión del cálculo de variaciones.

Hay un asunto que convenir antes de pasar a la caracterización que buscamos. Debe ser claro que los límites de integración  $x_1$  y  $x_2$  en (10) deben permanecer sin cambios en todo momento: vamos a suponer que  $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$ . Ello es así porque estamos extremalizando la funcional a condición de que la curva que se busca comience en  $x_1$  y termine en  $x_2$ . Claro que podríamos suspender tal hipótesis y plantearnos el extremalizar variando también los extremos; pero, aunque se puede, no lo haremos en esta exposición.

### Caracterización de los extremos.

Podemos usar la caracterización de valores extremos de una función también para funcionales: *Una curva extremizará una funcional cuando cualquier desviación a partir de ella no cambie, a primer orden, el valor de la funcional.*

¿Por qué? porque si el cambio es proporcional a la desviación, cambiando el signo de ésta lograríamos que la funcional cambiara de signo; la única manera de evitarlo es pedir que el cambio sea cuadrático y no lineal en la desviación. Condición que quedará más clara si la aplicamos a (10). Esto es lo que vamos a hacer a continuación.

Cambiar la función  $f$  significa usar cualquier otra función, digamos  $g$ . Si  $f$  minimiza a la funcional, el valor de ésta deberá aumentar al ser evaluada en  $g$ . Así entonces, necesitaremos llevar cuenta de los cambios que ocurran. Para ello introduciremos una forma para denotar el cambio en una función  $f$ ,

$$\delta f(x) \equiv g(x) - f(x); \quad (11)$$

usando de esta definición, podremos escribir a cualquier función diferente de  $f$  como:

$$g(x) = f(x) + \delta f(x), \quad (12)$$

y, por lo tanto, expresar su derivada,  $g'$ , en la forma siguiente:

$$g'(x) = f'(x) + \delta f'(x), \quad (13)$$

en donde  $\delta f'(x)$  se define, obviamente, como

$$\delta f'(x) \equiv \frac{d}{dx} (g(x) - f(x)) = g'(x) - f'(x). \quad (14)$$

La funcional evaluada en  $g$  será, entonces,

$$F[f + \delta f] = \int_{s_1}^{s_2} \Lambda(f(x) + \delta f(x), f'(x) + \delta f'(x), x) dx. \quad (15)$$

Si  $f$  extremaliza la funcional, el valor calculado de la última expresión (15) será, como ya lo dijimos, igual a primer orden que el calculado usando  $f$  en (10).

**La variación de la funcional.**

Todo nuestro interés se centra en los cambios a primer orden de aproximación, por lo que primero evaluaremos el cambio en la funcional

$$\delta F[f] \equiv F[f + \delta f] - F[f], \quad (16)$$

como

$$\delta F[f] = \int_{s_1}^{s_2} \{ \Lambda(f(x) + \delta f(x), f'(x) + \delta f'(x)) - \Lambda(f(x), f'(x)) \} dx; \quad (17)$$

noten que hemos supuesto que la variable de integración,  $x$ , no se transforma. Podríamos admitir cambios en  $x$  sin problemas pero, para evitar complejidades innecesarias, no lo haremos. Por cierto, es bueno que aclaremos que si bien  $z$  es la variable de integración, los límites de la integral son los números  $s_1$  y  $s_2$ . Simplemente elegimos llamar a los límites de manera diferente; les llamamos  $s$ , no  $x$ . Sucede también que el nombre que le damos a una variable sobre la que se integra es poco importante.

Como sólo nos interesan los cambios a primer orden, podemos desarrollar en una serie de potencias a la función  $\Lambda$  para lograr expresar a la diferencia que nos interesa como

$$\Lambda(f + \delta f, f' + \delta f') - \Lambda(f, f') = \frac{\partial \Lambda}{\partial f} \delta f + \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \delta f', \quad (18)$$

y expresar el cambio en  $F$  a primer orden, al que los entendidos llaman *la variación* de  $F$ , como

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f} \delta f + \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \delta f' \right) dx. \quad (19)$$

Ahora necesitamos expresar al integrando como un cierto factor que multiplique al cambio  $\delta f$ ; para ello, basta integrar por partes el último término, usando que

$$\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \right) \delta f' = \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \delta f \right)' - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \right)' \delta f, \quad (20)$$

para obtener

$$\delta F = \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \delta f \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial f} - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \right)' \right\} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial f} - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \right)' \right\} \delta f dx. \quad (21)$$

En el último paso usamos de nuestra hipótesis inicial de que no ocurren cambios en los extremos, esto es,

$$\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0. \quad (22)$$

### 8.2.4. Las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Y ahora, ¿qué hacemos con la expresión anterior? No debemos olvidar que, para que la funcional alcance un valor extremo, debemos suponer que la variación a primer orden es cero. Aplicando tal condición, obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial f} - \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \right)' \right\} \delta f \, dx = 0, \quad (23)$$

y como esto debe ser cierto para *cualquier* función  $\delta f$ , obtendremos finalmente que

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'} \right) = 0. \quad (24)$$

Esta es la condición para que la funcional sea un extremo.

Durante toda nuestra explicación siempre supusimos que la funcional a extremizar sólo dependía de  $f$  y de su derivada  $f'$ . Pero, en la mayoría de los casos, la funcional dependerá de  $N > 1$  funciones  $f_i$ ,  $i = 1 \cdots N$  y de sus correspondientes derivadas,  $f'_i$ ,  $i = 1 \cdots N$ . Esperamos que no les sea difícil admitir que las condiciones de extremo —ahora hay más de una— son

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial f'_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots N. \quad (25)$$

Estas ecuaciones usan de la función  $\Lambda$  para expresar las condiciones del extremo; al evaluarlas producen un conjunto de  $N$  ecuaciones diferenciales que aún hay que resolver.<sup>17</sup> Se les conoce, muy apropiadamente, como las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Hay un punto más que conviene aclarar, al obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange obtuvimos la condición para que una funcional tome un extremo; nunca usamos condición alguna que permita diferenciar a un máximo de un mínimo. Se puede, sin muchos problemas, caracterizarlos. No lo haremos aquí. Si les interesa, pueden consultar [9].

### 8.2.5. La curva de longitud mínima.

Ahora podremos resolver el problema que planteamos al inicio de la sección 1.1. Para encontrar la curva de longitud mínima que una el punto  $(x_1, y_1)$  con el punto  $(x_2, y_2)$ , tendremos que extremizar (10), para ello tomamos la función  $\Lambda = \sqrt{1 + f'^2}$  y la introducimos en la ecuación (24) para obtener

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \right) = 0 \quad \text{o sea} \quad f' = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \equiv m, \quad (26)$$

<sup>17</sup>Esto es análogo a lo que ocurre al extremizar una función  $f$ , la condición  $df/dx = 0$ , nos proporciona una ecuación que aún hay que resolver para encontrar los puntos extremos.



en donde  $m$  es, obviamente, una constante y  $k$  es el valor que toma la expresión — constante, puesto que su derivada es cero— en el lado izquierdo de la ecuación (26). Al resolver la ecuación en el extremo derecho de (26), concluimos que la función que extremaliza a la funcional de longitud es

$$y(x) = mx + b, \quad \text{con} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 x_1}, \quad (27)$$

que corresponde a una línea recta. La solución nos permite entender por qué  $m$  tiene una singularidad cuando  $k = 1$ ; ello corresponde simplemente a la pendiente de una recta vertical. Por cierto, podemos convencernos de que la recta es la curva de longitud mínima (y no máxima) entre dos puntos, porque ante cualquier modificación, la longitud se incrementaría.

### 8.3. Ejemplos del uso del cálculo variacional.

*Lo que llamo el principio de menor cantidad de acción es un principio [...] al que la naturaleza parece estar continuamente sujeta ya que lo observa no sólo en todos sus cambios sino también en su permanencia*  
...

Pierre Louis Moreau Maupertuis, 1746.

#### 8.3.1. El principio de mínima acción.

Euler, siguiendo a Lagrange, uso del cálculo variacional para reescribir las ecuaciones de la mecánica de Newton en una forma muy novedosa. La trayectoria de una partícula que va de un punto  $x_1$  a otro  $x_2$  es tal que hace mínimo al promedio temporal de la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial. Cualquier otra trayectoria que se pueda imaginar conducirá a un valor mayor que el que produce la trayectoria real.

Este logro de Euler y de Lagrange reactivó, entre otras cosas, la discusión entre la formulación de la dinámica como un proceso local, en donde las fuerzas aplicadas determinan la dirección y la magnitud de los cambios de velocidad, y las formulaciones globales, casi podríamos decir teleológicas,<sup>18</sup> en donde la partícula debe elegir, de entre todas las curvas que conectan dos puntos, aquella que haga que el promedio temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial tome un valor extremo. En realidad la discusión, que es muy interesante, podría evitarse tomando en cuenta que para extremalizar cualquier trayectoria debemos extremalizar también cualquier fragmento de ésta. Así no habría gran diferencia entre la formulación diferencial, en

<sup>18</sup>La *teleología* describe comportamientos sujetos a propósitos últimos, otorgando así una suerte de voluntad a los fenómenos. Se le considera lo opuesto a explicaciones que invocan únicamente a causas naturales como explicación de los fenómenos naturales.

términos de fuerzas y aceleraciones, y la formulación extremal, que usa trayectorias y requiere del principio de acción extrema. Ambas se podrían considerar locales, ya que para extremalizar cualquier trayectoria hay que hacerlo antes con todas las secciones infinitesimales de las que aquella se compone.

La mecánica de una partícula se puede expresar en una formulación variacional como sigue: primero definamos la diferencia entre la energía cinética y la potencial,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) \equiv \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q) \quad (28)$$

a la función  $\mathcal{L}$  le llamaremos el *lagrangiano*. Ocurre que la dinámica de una partícula se puede expresar [10] pidiendo que la trayectoria que sigue ésta sea la curva que extremalice a la *acción*,

$$S[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt, \quad (29)$$

la que claramente es, y así lo hemos indicado, una funcional de la trayectoria. Hacemos notar que a  $S$  se le llama también la primera función principal de Hamilton, pero es más corto llamarla simplemente acción.

Enunciar la ley del movimiento de una partícula significará así extremalizar  $S$ . A ello se le ha dado en llamar el *principio de mínima acción* o *principio de Hamilton*.<sup>19</sup> Para ser completamente consistentes deberíamos llamarle *principio de la acción estacionaria*, pero éste no sería el término usado habitualmente.

Entonces, pedimos que  $S$  sea un extremo, esto es que

$$\delta S = 0, \quad (30)$$

eso significa que se debe cumplir la regla (24),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (31)$$

A esta ecuación se llama, como ya dijimos, ecuación de Euler-Lagrange en la mayoría de las situaciones, aunque, en el caso específico de la dinámica, se le conoce simplemente como *ecuación de Lagrange* [10]; ésta, usando de la definición de  $\mathcal{L}$ , conduce directamente a

$$m\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0, \quad (32)$$

que, si recordamos que la fuerza es

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q}, \quad (33)$$

---

<sup>19</sup>Sir William Rowan Hamilton (Dublín, Irlanda, 3 o 4 de agosto de 1805 (nació a la medianoche y eso provocó confusión en su fecha de nacimiento) — 2 de septiembre de 1865), científico irlandés y niño prodigio que consiguió aprender 14 lenguajes durante su infancia. Fue nombrado Profesor de astronomía del Trinity College en Dublín, y Astrónomo Real de Irlanda a los 22 años; puestos que le fueron conferidos para que pudiera continuar sus investigaciones sin interrupciones para enseñar.

no es más que la segunda ley de Newton [10].<sup>20</sup> El principio de mínima acción sería así equivalente a las leyes de la mecánica.

Pero, en realidad, eso no es exactamente cierto. Hemos demostrado que, partiendo del principio de mínima acción, podemos obtener la segunda ley de Newton, pero *sólo* en algunos casos; lo podremos lograr cuando exista una energía potencial, pero existen fuerzas para las que es imposible encontrar una. Si no la hay, no podremos construir un lagrangiano; el no tener un lagrangiano no nos permitirá avanzar más. Todos esos casos no se pueden, por lo tanto, calcular del principio de mínima acción. El ejemplo que viene inmediatamente a la mente es el de cualquier problema que involucre a la fuerza de roce.

### 8.3.2. Determinismo versus teleología.

Aún debemos reconciliar la descripción determinista newtoniana, en donde los valores de la posición y de la velocidad en un instante dado determinan, con auxilio de las fuerzas, las correspondientes posiciones y velocidades un instante después, con la imagen global y aparentemente *teleológica* del principio de mínima acción; en donde un sistema parece tener que enviar “tentáculos de prueba” que le permitan decidir de antemano cuál es la trayectoria que extremaliza a la acción. Ello lo intentamos a continuación.

Una manera de entender esta aparente contraposición de puntos de vista es la pragmática: Si ambos métodos funcionan, para que nos complicamos la vida. Este es un punto de vista muy poco satisfactorio, sobre todo si se piensa en el clima de confrontaciones ideológicas que caracterizó al siglo XVIII. Otra posibilidad, que en realidad no agota el debate, es considerar que la minimización se puede hacer muy localmente, probando pequeños trozos de trayectoria cada vez. Si extremalizamos cada pequeño pedazo infinitesimal de trayectoria, seguramente estaremos extremalizando también a la trayectoria completa,<sup>21</sup> y este proceso es, por su naturaleza, siempre local.

Pero hay otra forma de entenderlo que, además, nos permite hacer conexión con la descripción más profunda de la realidad de que disponemos actualmente. Usando de las ideas cuánticas, estableceremos que la partícula *sí* “prueba” todas las posibles trayectorias a su alcance y elige a la que minimiza a la acción. ¿Cómo puede ocurrir tal cosa sin que las partículas tengan que lanzar “pseudópodos fantasmales” para tantear las trayectorias? Esto es lo que describiremos en la siguiente sección.

## 8.4. La descripción cuántica de la realidad.

... *nadie entiende realmente el comportamiento cuántico* ...

<sup>20</sup>Isaac Newton (Lincolnshire, Inglaterra 4 de enero de 1643 — Londres, Inglaterra 31 de marzo de 1727). El más conocido e influyente científico inglés; inventor del cálculo infinitesimal, inventor del telescopio reflector, descubridor de las leyes de la mecánica y de la ley de la gravitación universal.

<sup>21</sup>No agota el debate porque, entre otras cosas, no hemos demostrado tal afirmación.

R. P. Feynman, 1965.

La descripción cuántica, a diferencia de la clásica, sólo nos permite calcular probabilidades<sup>22</sup> Es la descripción más fundamental de la naturaleza de que disponemos, pero la describe como una suerte de ruleta cósmica; en donde, además, vale superponer todo con todo. Esto quiere decir que si tenemos dos estados cualesquiera de un sistema,  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ ,<sup>23</sup> el estado más general es la suma —o superposición—  $a_1|1\rangle + a_2|2\rangle$ , con coeficientes complejos tales que  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ , como corresponde a una descripción probabilista [11].

Así, para describir una partícula que se mueva del punto  $x_1$  al tiempo  $t_1$  al punto  $x_2$  al tiempo  $t_2$ , tendremos que calcular la probabilidad,  $P_{12}$ , de que una partícula que empieza a moverse en el punto  $x_1$  al tiempo  $t_1$ , termine en la posición  $x_2$  al tiempo  $t_2$ . Pero la probabilidad no se calcula directamente, antes hay que evaluar la llamada *amplitud de probabilidad*,  $\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle$ ,<sup>24</sup> la que se puede expresar como

$$\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle = \sum_a \langle x_2 t_2 | x_a t_a \rangle \langle x_a t_a | x_1 t_1 \rangle \quad (34)$$

en donde la suma es una manera de indicar que se deben superponer *todas* las trayectorias que unan el punto inicial  $(x_1, t_1)$  con el punto final  $(x_2, t_2)$ , pasando por *todos* los puntos intermedios posibles  $(x_a, t_a)$ . Una vez evaluada la expresión anterior, la probabilidad buscada será el módulo al cuadrado de la amplitud,

$$P_{12} = |\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle|^2. \quad (35)$$

Lo interesante es que esta regla cuántica nos puede explicar el principio de mínima acción. Veamos como.

#### 8.4.1. La amplitud cuántica de 1 a 2.

Se sabe que la amplitud de probabilidad para ir de la posición  $(x_1, t_1)$  a la posición cercana  $(x_2, t_2)$  es [12]

$$\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle = \mathcal{N} \exp \left( \frac{i}{\hbar} S[x] \right), \quad (36)$$

<sup>22</sup>Esta sección puede ser muy difícil para personas que nunca antes hubiesen encontrado las ideas cuánticas. Sin embargo, aún si no todas las ideas resultan fácilmente comprensibles, creemos que puede ser instructiva. Para introducirse a tales ideas recomendamos leer los primeros capítulos del libro, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 3, Addison-Wesley; o, para una introducción aún más elemental pero muy instructiva, el primer capítulo del libro de R. Feynman, *QED, the strange theory of light and matter*, Princeton University Press.

<sup>23</sup>Es curioso que un estado cuántico sea, fundamentalmente, sólo un número complejo, esos entes a los que Euler proporcionó respetabilidad científica.

<sup>24</sup>Esta notación para las amplitudes se lee de derecha a izquierda. A la derecha va el estado inicial  $|i\rangle$ , en un símbolo llamado un *ket*, y a la izquierda el final  $\langle f|$ , en un símbolo llamado un *bra*. De manera que a la amplitud correspondiente,  $\langle f|i\rangle$ , se le llama un *bra(c)ket*.

en donde  $\mathcal{N}$  es una constante que no es necesario evaluar pero que se elige para que la probabilidad esté apropiadamente normalizada,  $\hbar$  es la constante de Planck dividida entre  $2\pi$ ,  $i = \sqrt{-1}$  es la unidad imaginaria,<sup>25</sup> y  $S[x]$  es la *acción clásica* (29) calculada entre el instante  $t_1$ , en que la partícula está en la posición  $x_1$ , y el tiempo  $t_2$ , en que está en la posición  $x_2$ .

En la expresión (34) la suma es sólo un símbolo para la operación a realizar, que, posiblemente, corresponda mejor a la noción de una “integral”. Pero ésta no puede corresponder a una integral de Riemann,<sup>26</sup> y, ni siquiera, a una integral de Lebesgue,<sup>27</sup> ya que de lo que se trata es de superponer todas las trayectorias (cada una descrita por una función) que unan al punto inicial  $(x_1, t_1)$  con el punto final  $(x_2, t_2)$ .

### 8.4.2. Integrales de Feynman.

La expresión habría de interpretarse algo así como [11]

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \sum_{\text{todos los caminos}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \rightarrow \int_{\text{todos los caminos}} \mathcal{N} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \cdot \mathcal{D}x, \quad (37)$$

en donde  $\mathcal{D}x$  representaría una medida<sup>28</sup> definida en el espacio de las trayectorias posibles de una partícula que va del punto  $(x_1, t_1)$  al punto  $(x_2, t_2)$ . A este objeto matemático (37) se le conoce como una integral funcional, o, más comunmente, como una integral de trayectoria o de Feynman.<sup>29</sup>

Una cosa hay que notar de nuestra discusión anterior. La dejamos a un nivel muy descriptivo, ya que, nos podemos preguntar, ¿qué es exactamente la medida  $\mathcal{D}x$ ?

No vamos a describir aquí todos los detalles matemáticos que se necesitan para poner sobre bases firmes esta descripción [13]. Baste saber que se puede hacer y que, como en muchas otras ocasiones, un desarrollo puramente físico dió lugar a mucha investigación matemática que permitió poner sobre bases matemáticamente firmes el

<sup>25</sup>Estamos empleando, les recordamos, un símbolo que introdujo Euler

<sup>26</sup>Para definir una integral de Riemann de una función,  $f$ , partimos el intervalo en el que está definida  $f$  levantamos verticales de cada punto en la partición a  $f$ , calculamos el área de cada uno de los rectángulos que resultan, las sumamos, y, finalmente, tomamos el límite en que la partición se hace infinitamente fina. Si existe este límite este es el valor de la integral de Riemann de  $f$ . Se le llama así por Bernhard Riemann (Breselenz Alemania, 17 de septiembre de 1826 — Selasca Italia, 20 de julio de 1866) matemático alemán que hizo notables aportaciones al análisis y a la teoría analítica de los números.

<sup>27</sup>La integral de Lebesgue requiere de una medida  $\mu$ ; se le define para que, en los casos en que exista, coincida con el valor calculado usando la definición de Riemann, pero puede tratar casos más complicados en que no existe esta última. La integral fue nombrada para honrar a Henri Lebesgue (Beauvais Francia, 28 de junio de 1875 — Paris Francia, 26 de julio de 1941) matemático francés famoso precisamente por su teoría de la integración.

<sup>28</sup>Una medida análoga al  $dx$  que todo el mundo usa al integrar funciones reales de variable real.

<sup>29</sup>Richard Phillips Feynman (11 de mayo de 1918, Nueva York — 15 de febrero de 1988, Los Ángeles), científico estadounidense, creador de la técnica diagramática para la electrodinámica cuántica, e impulsor de las técnicas funcionales en la mecánica cuántica.

tipo de integración implicada por (37).<sup>30</sup> Lo que puede ser mejor es entender que la regla (37) es totalmente equivalente a la ecuación de Schrödinger, y que ofrece una suerte de justificación cuántica del principio de mínima acción, como veremos a continuación.

### 8.4.3. El principio de mínima acción, demostrado.

*Con nosotros será evidente y suficientemente claro...*

John Donne, 1590.

Para ver cómo funciona la regla, calculemos una integral aproximadamente. El exponente del integrando en la expresión (37) es, con toda certeza, oscilante. Calculemos la integral bajo la hipótesis que las oscilaciones tienen un período  $T$  muy pequeño comparado con el intervalo de integración en la acción,  $t_2 - t_1$ . Esto permite evaluar la integral (37) considerando sólo las contribuciones que provengan del valor extremo del integrando. No tomaremos en cuenta las contribuciones que estén lejos del extremo ya que supondremos que se cancelan unas con otras, no contribuyendo en (casi) nada a la amplitud de probabilidad. Si evaluamos así, tendremos primero que encontrar el valor extremo del integrando. Éste ocurrirá cuando se cumpla la condición de extremo

$$\frac{\delta S[x(t')]}{\delta x(t)} = 0, \quad (38)$$

pero esto no es más que el principio de Hamilton; así, a este nivel, el principio de Hamilton aparece como una condición que se debe imponer para poder evaluar la integral (37) en las condiciones en las que esperamos que valgan las ecuaciones clásicas. De esta forma, la aproximación que estamos usando es la que deberíamos usar al investigar las condiciones en que domina el comportamiento clásico sobre el cuántico.

Como la ecuación que resulta de la condición anterior es la de Lagrange, la contribución principal provendrá de la trayectoria clásica y, contribuyendo casi en nada las demás, todo se reduciría a evaluar la amplitud para la trayectoria por la que se mueve la partícula, que sería, insistimos, la clásica.

Así, evaluar la probabilidad sería muy fácil: a la trayectoria clásica que conecta los puntos 1 y 2, le corresponde una amplitud  $e^{i\delta}$  en donde  $\delta$  es sólo una fase, y a todas las demás, cero. Si requerimos la probabilidad, ésta es simplemente

$$P_{12} = |e^{i\delta}|^2 = 1. \quad (39)$$

<sup>30</sup>Pero debemos mencionar que Norbert Wiener (Columbia EUA, 26 de noviembre de 1894 — Estocolmo Suecia, 18 de marzo de 1964) también introdujo integrales del mismo tipo para la descripción de procesos estocásticos [14]. Wiener mantuvo una relación especial con el Instituto Nacional de Cardiología por su colaboración con el eminente cardiólogo mexicano, pionero de la cibernética, y director fundador del CINVESTAV-IPN Arturo Rosenblueth Stearns (Cd. Guerrero Chih., 2 de octubre de 1900 — Cd. de México D.F., 20 de septiembre de 1970).

Entonces, se sigue la trayectoria clásica con probabilidad 1, lo que, como lo saben bien, corresponde a la certidumbre absoluta. Por lo tanto, las otras trayectorias tienen probabilidad cero. Para saber ahora como se mueve la partícula hay que resolver las ecuaciones de Lagrange y lo sabremos con toda certeza. Espero que noten que, en cierto sentido, usando de la mecánica cuántica hemos justificado el principio de Hamilton.

Esto es, si aceptamos que la teoría cuántica es la descripción más adecuada de la realidad de que disponemos y, usándola, tratamos de describir sus consecuencias en condiciones en las que se manifieste el comportamiento clásico, vamos a descubrir que requerimos de la validez del principio de mínima acción.

#### 8.4.4. La validez del principio de Hamilton.

Acabamos de explicarnos cómo es que funciona el susodicho principio. Cómo la naturaleza se comporta cuánticamente y la teoría cuántica *no* es local, una partícula *recorre simultáneamente todas las trayectorias* posibles entre un punto y otro del movimiento. Cuando el comportamiento clásico domina, la evaluación aproximada de la amplitud de probabilidad nos conduce a que, de entre todas las trayectorias, la trayectoria clásica es la única que contribuye a la probabilidad. Ello como resultado del principio de mínima acción, que resulta ser la condición de validez de la aproximación.

¡Hemos recuperado en este cálculo tanto a la mecánica clásica como a la certidumbre, partiendo de la formulación cuántica en términos de integrales de trayectoria! También hemos ilustrado que la solución clásica es una entre muchas, que se elige sólo después de que el sistema las ha probado todas y ha encontrado la que minimiza el promedio temporal de la diferencia entre la energías cinética y potencial. Es un resultado definitivamente interesante.

### 8.5. El legado del cálculo de variaciones de Euler.

*... avemmos homes de mocho entendimiento para facer que cosas communes pareçan endreçolas et axennas ...*

Alfonso X, 1251.

Se puede reconocer el espíritu de Euler en muchas ideas actuales con las que, aclaramos, Euler no tuvo nada que ver directamente. El cálculo funcional es un buen ejemplo. Las funcionales son, a final de cuentas, funciones definidas sobre un espacio de funciones y el cálculo variacional una forma de minimizar funcionales. ¿Podríamos generalizar las ideas anteriores hasta lograr un cálculo diferencial en tales espacios funcionales?

La respuesta a esta pregunta es un sí rotundo. Lo matemáticamente novedoso aquí es la idea de diferenciación en un espacio funcional y, obviamente, se podría definir

la correspondiente noción de integración respecto a una medida en un espacio de funciones; lamentablemente, seguir esta última idea, aún en una explicación sucinta y esquemática, llevaría mucho espacio [13] y no la desarrollaremos.

### 8.5.1. La derivada funcional.

Para definir apropiadamente la derivada, tendremos que incluir distribuciones, como la delta de Dirac  $\delta(x - x')$ ,<sup>31</sup> entre los objetos matemáticos necesarios. Tenemos que decir que esta no es la definición más general posible de la derivada funcional, es simplemente la definición más usada por los físicos teóricos y requiere que las funcionales sobre las que se aplica pertenezcan a un espacio de Hilbert<sup>32</sup> o, al menos, de Banach.<sup>33</sup> Si, por ejemplo, el espacio sobre el que se aplica fuera menos restrictivo, digamos, simplemente un espacio topológico localmente convexo, entonces la definición apropiada tendría que ser la de derivada de Gateaux [15].<sup>34</sup>

Entonces, sea  $F[f]$  una funcional definida sobre un espacio de Hilbert, la *derivada funcional* de  $F$  se define por

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)]}{\epsilon}, \quad (40)$$

donde  $\epsilon$  es un número real y  $\delta(x - x')$  es una distribución a la que se le llama *delta de Dirac*, que está definida a través de la relación,

$$F(a) = \int F(x) \delta(x - a) dx, \quad (41)$$

<sup>31</sup>Por Paul Adrien Maurice Dirac (Bristol, UK, 8 de agosto de 1902 — Tallahassee, E. U., 20 de octubre de 1984). Físico teórico británico. Uno de los fundadores de la mecánica cuántica; formuló una ecuación (la de Dirac) para describir el comportamiento de partículas cuánticas relativistas y predijo la existencia de antipartículas.

<sup>32</sup>Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial en el que está definido un producto escalar, y tiene la propiedad de que toda sucesión convergente de vectores converge a un elemento dentro del espacio. El nombre le viene por David Hilbert (23 de enero de 1862, Königsberg Alemania — 14 de febrero de 1943, Göttingen, Alemania) quién fuera el matemático más infuyente y universal de la primera mitad del siglo XX.

<sup>33</sup>Un espacio de Banach es un espacio vectorial complejo  $V$ , dotado de norma, y tal que toda sucesión definida en  $V$ , cuyos términos se acerquen entre sí, tenga un límite también contenido en  $V$ . El espacio euclídeo  $n$ -dimensional,  $R^n$ , es un espacio de Banach; el espacio de Hilbert correspondiente a los eigenestados de un sistema cuántico también lo es. El nombre le viene por el matemático polaco Stefan Banach (Cracovia Polonia 30 de marzo de 1892 — Lvov Polonia 31 de agosto de 1945). Fundador del análisis funcional que contribuyó también en forma importante a la teoría de la medida y a la teoría de los conjuntos. Se le conoce, fuera de círculos matemáticos, por la llamada paradoja de Banach-Tarski, que *no* es una paradoja sino un *teorema*, que afirma que se puede lograr una partición de una esfera tridimensional que permite que, al reconstruirla sin añadir ni eliminar nada, se obtengan dos esferas iguales a la primera.

Alfred Tarski (Varsovia Polonia 14 de enero de 1902 — Berkeley EUA 26 de octubre de 1983), matemático polaco con importantes contribuciones a la topología, a la teoría de la medida, e iniciador de la metamatemática. Eligió el apellido Tarski, en vez del Tenenbaum original, para evitar cualquier persecución antisemita aunque fuese un ateo convencido. Cambió completamente la lógica y su relación con la matemática.

<sup>34</sup>René Gateaux (5 de mayo de 1889 — 3 de octubre de 1914), matemático francés que trabajo en cálculo funcional. Fue muerto en la primera guerra mundial.



en donde el intervalo de integración debe incluir en su interior al punto  $x = a$  [16].

Podemos ilustrar la definición que hemos dado, en (40), de derivada funcional con algunos ejemplos específicos.

### Ejemplos básicos.

Sea  $F[f(x)] = f(x)$ , entonces la derivada funcional de  $F$  es

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) + \epsilon \delta(x - y) - f(x)}{\epsilon} = \delta(x - y), \quad (42)$$

relación ésta que es útil para calcular otras derivadas funcionales.

Si definimos la funcional siguiente

$$F[f] = \int f(x) dx, \quad (43)$$

su derivada funcional es

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int (f(x) + \epsilon \delta(x - y)) - \int f(x) dx}{\epsilon} \\ &= \int \delta(x - y) dx \\ &= 1. \end{aligned} \quad (44)$$

### Ecuaciones integrales lineales.

Otro ejemplo similar lo provee el caso del núcleo de una ecuación integral lineal [15],

$$E[f] = \int K(x, x') f(x') dx', \quad (45)$$

es ahora muy simple encontrar que

$$\frac{\delta E[f(x)]}{\delta f(y)} = K(x, y). \quad (46)$$

### La regla de la cadena.

La regla de la cadena se extiende al cálculo funcional. Si consideramos una funcional que sea la composición de otras,  $H[f] = G[F[f]]$ , entonces

$$\frac{\delta H[f(x)]}{\delta f(y)} = \frac{\delta G[F[f(x)]]}{\delta f(y)}$$

$$= \int \frac{G[F]}{\delta F[f(x')]} \frac{\delta F[f(x')]}{\delta f(y)}. \quad (47)$$

Como ejemplo podemos calcular la derivada funcional de

$$E[F], \quad \text{en donde} \quad F[f] = \int f(x_1)f(x_2)dx_1dx_2; \quad (48)$$

encontramos que

$$\frac{\delta E[F]}{\delta F} = \delta(x - x') \quad (49)$$

y

$$\frac{\delta E}{\delta f} = 2 \int f(y)dy, \quad (50)$$

entonces, la regla de la cadena nos dice que

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta f} &= 2 \int \int \delta(x - x') f(z) dz dx' \\ &= 2 \int f(z) dz. \end{aligned} \quad (51)$$

Ahora no les será difícil convencerse que, en general,

$$\frac{\delta F^n[f(x)]}{\delta f(y)} = nF^{n-1}[f(x)]. \quad (52)$$

Las ecuaciones anteriores ilustran que la funcional  $F$ , definida en (43), juega un papel en algún sentido análogo al de la variable  $x$  del cálculo ordinario. Ésto nos puede sugerir considerar “series de potencias funcionales,” en la variable  $F$ , como las que mostramos a continuación.

### 8.5.2. Una serie de potencias funcional.

Usando de  $F$ , definida en (48), ¿podrá definirse algo así como una “serie de potencias” funcional?

La respuesta es sí, como ilustramos a continuación.

Una funcional  $G$  puede, en las condiciones apropiadas, representarse en la forma de una suerte de *serie de potencias funcional*,

$$G[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int f(x_1) \dots f(x_n) \left. \frac{\delta^n G(f)}{\delta f(x_1) \dots \delta f(x_n)} \right|_{f=0} dx_1 \dots dx_n. \quad (53)$$

La expansión en una serie funcional de Taylor de  $G[f]$ , es posible y se expresa por (53), sólo si la función —no funcional— ordinaria  $g(\lambda) = G(f + \lambda h)$ , tiene una serie ordinaria de Taylor, en potencias de  $\lambda$ , que además converge en el punto  $\lambda = 1$  [13].

### 8.5.3. Aplicaciones.

Todo este formalismo para el cálculo funcional encuentra uso en la teoría de los procesos aleatorios à la Wiener [14], en la hidrodinámica, en la teoría de las ecuaciones diferenciales, en la teoría cuántica, y, especialmente, en la teoría cuántica de los campos, en donde ha abierto la puerta a sus usos en la mecánica estadística [18].

### 8.5.4. Un poco más de formalidad.

Tanto la definición como el uso que hemos dado a la noción de derivada funcional, tal y como la hemos usado en esta sección, se puede formalizar apropiadamente usando de la siguiente definición.

*Derivada de Fréchet.*<sup>35</sup> Sea  $V$  un espacio de Banach. Una función  $f : V \rightarrow V$  se dice derivable en el sentido de Fréchet si existe un operador lineal acotado  $A$  definido en  $V$  tal que el siguiente límite exista

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - A(h)\|}{\|h\|} = 0; \quad (54)$$

entonces, la derivada de Fréchet de  $f$  en  $x$  es  $Df(x) = A$ . En la definición (54)  $\|z\|$  representa al módulo de  $z$  en  $V$ . Para más detalles véase [17].

Formalizar la noción de derivada funcional que dimos en (40) a partir de esta definición puede ser una ocupación entretenida para aquellos con inclinaciones matemáticas. Nosotros no lo haremos aquí.

## 8.6. Conclusión.

*De los hechos expuestos podemos extraer la conclusión que el dominio de validez de [los métodos variacionales] ha llegado mucho más lejos que las fronteras de la mecánica ...*

Herman Hemholtz, 1886.

La influencia de Euler se siente en los más avanzados rincones de la física y, por ende, de las matemáticas contemporáneas. Los matemáticos se apoyaron en la extraordinaria obra de Euler para lograr los asombrosos avances de la matemática en los siglos XIX y XX. De su enorme genio, posiblemente lo más meritorio sea el desarrollo del método general para resolver problemas variacionales, por sus ramificaciones actuales en el análisis y sus múltiples aplicaciones. Pero, en realidad, seleccionar un tema específico y llamarlo su contribución más importante, es un asunto de elección personal. Se debe reconocer que todo lo hecho por Euler es “lo más importante” para alguno de los campos que hizo avanzar o que creó con su trabajo.

<sup>35</sup>Por Maurice Fréchet (Maligny Francia, 2 de septiembre de 1878 — Paris Francia, 4 de junio de 1973) matemático francés cuyas contribuciones fueron principalmente a la topología y al análisis funcional.

Claro que se puede criticar lo hecho por Euler, como matemáticos de siglos posteriores al XVIII han hecho, por ser demasiado intuitivo y poco preciso. Hacer una crítica de tal naturaleza parece querer ocultar el papel de la imaginación en la creación de matemáticas. Los matemáticos usan de la intuición y de la analogía tanto como cualquier otro científico, es sólo que tratan al máximo de formalizar y de poner sobre bases lógicas firmes sus resultados al reportarlos. Este proceso conduce a una aparente falta de base intuitiva en la mayoría de las exposiciones de la matemática actual. Pero ello no es un defecto, es, de hecho, lo que da validez al conocimiento matemático.

Consideramos que usar tal clase de crítica en el caso de Euler es equivalente a criticarlo por haber nacido en el siglo equivocado. El genio de Euler logró que la matemática avanzara a pasos gigantescos, contribuyendo así a que los requisitos de rigor matemático se elevaran, como lo hicieron durante los siglos XIX y XX. Para cualquiera que entienda la profundidad de las contribuciones de Euler, esas opiniones no harán mella ni en su legado matemático, ni en las múltiples formas en que éste se manifiesta en la ciencia —no sólo en la matemática— actual.

#### **Agradecimientos.**

Dedicamos este trabajo a la memoria de nuestro querido amigo Darío Moreno (1928–2007) quién fue, además de físico, un excelente pedagogo, y entendía profundamente el significado del principio de mínima acción. Agradecemos los comentarios y correcciones estilísticas de José Ángel Vallarta, las correcciones de Elisa Guilaumín, y las sugerencias de Benjamín Arellano. Esta contribución ha sido parcialmente financiada por el proyecto PAPIIT-UNAM IN115406-3.

# Bibliografía

- [1] DUNHAM, WILLIAM, *Euler. The Master of us all*, The Mathematical Association of America, Dolciani mathematical expositions vol. 22, 1999.
- [2] SHANNON, C. E. AND WEAVER, W., *The mathematical theory of communication*, University of Illinois Press, 1949.
- [3] VEDRAL, VLATKO, *Introduction to quantum information science*, Oxford University Press, 2006.
- [4] TRUESDELL, C. AMBROCE, *An idiot's fugitive essays on science*, Springer-Verlag, 1984.
- [5] François Marie Arouet (Voltaire), *Candide, ou l'optimisme, traduit de l'allemand de Monsieur le Docteur Ralph*, Cramer, 1759.
- [6] EULER, LEONHARD, *Institutionum calculi integralis, volumen tertium*, Petropoli impensis academiae imperialis scientiarum, San Petersburgo, 1770. Disponible para consulta en <http://math.dartmouth.edu/~euler/>. Este es el sitio de la obra de Euler disponible en la red.
- [7] RÍBNIKOV, K., *Historia de las matemáticas*, Editorial Mir, 1987.
- [8] NEWTON, ISAAC, *Principios matemáticos de la filosofía natural*, Altaya, 1993.
- [9] COURANT, RICHARD AND HILBERT, DAVID, *Methods of mathematical physics*, en dos volúmenes, Interscience, 1962.
- [10] ARNOLD, VLADIMIR I., *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
- [11] FEYNMAN, R. P. AND HIBBS, A. R., *Quantum mechanics and path integrals*, Mc Graw-Hill, 1965.
- [12] DIRAC, P. A. M., *The principles of quantum mechanics*, Clarendon Press, 1947.

- [13] GELFAND, I. M. AND YAGLOM, A. M., *Integration in functional spaces and its applications in quantum physics*, J. Math. Phys. **1**, 48–69, 1960.
- [14] WIENER, NORBERT, *Differential space*, J. Math. Phys. **2**, 131–174, 1923, reimpresso en *Selected papers of N. Wiener*, p. 55, MIT Press, 1944.
- [15] RIESZ, F. AND SZ.-NAGY, B., *Functional analysis*, Frederick Ungar, 1947.
- [16] LIGHTHILL, M. J., *Fourier analysis and generalized functions*, Cambridge University Press, 1975.
- [17] GRIFFEL, D. H., *Applied functional analysis*, Ellis Horwood, 1985.
- [18] ZINN-JUSTIN, J., *Path integrals in quantum mechanics*, Oxford University Press, 2005.

## Capítulo 9

# Estabilidad mediante funcionales

Aguirre, L. <sup>1</sup> y Seibert, P. <sup>2</sup>

### Resumen

En este capítulo se presentan ciertas extensiones recientes de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Los nuevos métodos abstractos permiten aplicaciones a una amplia gama de objetos concretos como sistemas de ecuaciones diferenciales parciales y ecuaciones funcional-diferenciales con retardo.

### Introducción.

El uso de funcionales para el estudio de la dinámica se remonta a los trabajos de Euler y sus contemporáneos. En un sentido parecido, aún con claras diferencias, A. M. Lyapunov [1] usa cierta generalización del concepto físico de energía para investigar propiedades de sistemas dinámicos. En el fondo estaba la observación de J.L. Lagrange, contemporáneo de Euler y con lazos estrechos entre los trabajos de ambos, de que los estados de equilibrio estable de un sistema físico corresponden a los lugares donde la energía potencial alcanza su mínimo. Euler, guiado por la intuición, estaba convencido de que todos los fenómenos naturales presentan extremos.

---

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, [lac@xanum.uam.mx](mailto:lac@xanum.uam.mx)

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, [pskm@xanum.uam.mx](mailto:pskm@xanum.uam.mx)

Como era en cierto sentido natural, se produjo entre los siglos XVIII y XIX un cambio de enfoque en el estudio matemático de los fenómenos físicos: mientras que en el primero se buscaban los principios subyacentes que darían las ecuaciones de movimiento, en el periodo posterior el énfasis cambió hacia la búsqueda de propiedades cualitativas de las soluciones. En este contexto el pionero principal fue H. Poincaré quien a su vez ejerció una fuerte influencia sobre Lyapunov ([1]; introducción), mientras usó las ecuaciones de Euler–Lagrange en su mecánica celeste ([2]; p.126).

En el presente capítulo hacemos un análisis profundo para descubrir la esencia subyacente al formalismo de la función de Lyapunov para terminar con un principio de mínimo que encaja con la intuición de Euler sobre el papel preponderante de tales principios.

## 9.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para mayor sencillez, nos limitamos a ecuaciones autónomas. Sea  $X$  un espacio lineal normado (en particular el espacio euclideo  $n$ –dimensional,  $\mathbb{R}^n$ ),  $f$  una función continua de  $X$  en  $X$ . Entonces, una función diferenciable  $u$  de un intervalo real abierto  $I$  en  $X$  se dice *solución (clásica) de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

si, para cada  $t \in I$ , vale

$$\dot{u}(t) = f(u(t)) \quad (2)$$

( $\dot{u} = du/dt$ ). Obviamente, la función  $u$  es de derivada continua en  $I$ .

En adelante, vamos a suponer que se cumplen las propiedades de existencia global, unicidad y dependencia continua con respecto a los valores iniciales, suponiendo que el intervalo  $I$  contenga el origen:

*Para cada  $x \in X$  existe exactamente una solución  $u$  de la ecuación (1) que satisface la condición inicial*

$$u(0) = x \quad (3)$$

y que está definida en toda la recta  $\mathbb{R}$ , respectivamente en la semirecta  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ , y que depende de manera continua del valor inicial. { En el último caso la derivada  $\dot{u}(t)$  está definida hacia la derecha para  $t = 0$  y la ecuación (2) debe entenderse en el sentido de que  $\dot{u}(0)$  denota la derivada unilateral. }

La demostración de esta propiedad, bajo hipótesis apropiadas para la función  $f$ , se encuentra en los libros sobre la materia (p. ej. [3]).

Denotamos por  $u_x$ , la solución que satisface la condición (3). Una notación más escueta, usada ahora con frecuencia, consiste en escribir simplemente  $xt$  para  $u_x(t)$ ; así, (3) toma la forma



$$x0 = x. \quad (4)$$

## 9.2. Sistemas dinámicos y semidinámicos.

Ya que muchas de las propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales no dependen de la diferenciabilidad de las mismas, sino sólo de su estructura algebraica, de orden y topológica, se ha introducido un concepto abstracto de *sistema (semi-)dinámico*, que refleja las características de aquellas y que involucra solamente las estructuras mencionadas.

**Definición 9.2.1.** Un *sistema (semi-)dinámico* es una terna,  $(X, T, \pi)$ , donde  $X$  denota un espacio topológico,  $T$  un (semi-)grupo topológico ordenado, en particular  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^+$ ) y  $\pi$  una función continua del espacio producto  $X \times T$  en  $X$ :

$$\pi : X \times T \rightarrow X$$

que satisface los axiomas siguientes.

- (I)  $\pi(x, 0) = x$ , para todo  $x \in X$ , [Axioma de identidad];
- (II)  $\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$  para todos  $x \in X$ ,  $t_1 \in T$ ,  $t_2 \in T$ , [Axioma de (semi-)grupo o de homomorfía];

Usando la notación abreviada mencionada, estos se reducen, a (4) y  $(xt_1)t_2 = x(t_1 + t_2)$ , respectivamente.

Según otras terminologías, los sistemas (semi-)dinámicos se llaman también (*semi*-)flujos, acciones del (semi-)grupo  $T$  sobre el espacio  $X$  (abreviados: acciones reales en el caso  $T = \mathbb{R}$ , o (semi)grupos continuos)

La *órbita*  $\gamma(x)$  a través de  $x \in X$  es el conjunto  $x\mathbb{R} = \{xt \mid t \in \mathbb{R}\}$ ;  $\gamma^+(x) = x\mathbb{R}^+$  y  $\gamma^-(x) = x\mathbb{R}^-$  se llaman las *semiórbitas positiva y negativa*. Si  $\gamma(x) = \{x\}$ , se dice  $x$  *punto crítico* o *estado de equilibrio* o *de reposo*. A todo punto  $x$  le asociamos una pareja de conjuntos límite:  $\Lambda^\pm(x) = \bigcap \{\overline{\gamma^\pm(xt)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ , o equivalentemente,  $y \in \Lambda^\pm(x)$  si existe una sucesión  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow \pm\infty$  y  $xt_n \rightarrow y$ . Se puede verificar fácilmente que

$$\overline{\gamma^\pm(x)} = \gamma^\pm(x) \cup \Lambda^\pm(x),$$

las cerraduras de las semiórbitas positiva y negativa.

### 9.3. Conceptos de estabilidad. Criterio de Lyapunov.

Una órbita  $\gamma(x)$  se llama *positivamente* [negativamente] *Poisson estable* o *recurrente* si  $x \in \Lambda^\pm(x)$ . Los puntos críticos son trivialmente recurrentes así como también las órbitas periódicas. En el caso de un flujo en el plano, estos dos tipos de órbitas recurrentes son las únicas [3]. Debido a un teorema de G. D. Birkhoff, todo conjunto límite compacto contiene una órbita recurrente [4].

Un conjunto compacto  $M \subset X$  (que en la mayoría de los casos será un punto de reposo o una órbita cerrada) se llama *Lyapunov estable*, (o simplemente *estable*) si, dada una vecindad  $U$  de  $M$ , existe una vecindad  $V$  de  $M$ , tal que toda órbita con punto inicial en  $V$  permanece en  $U$ :  $\gamma^+(V) \subset U$ . Si  $M$  no es estable se dice que es *inestable*.

El conjunto  $M$  es (*positivamente*) *invariante* si  $(\gamma^+(M) = M) \cap \gamma(M) = M$ . Si  $M$  es estable es obviamente positivamente invariante.

Damos aquí el criterio de estabilidad usando la función de Lyapunov en la forma de Zubov ([5]; vea también [6]), i.e. no dependiendo explícitamente del tiempo, aplicada a una ecuación diferencial autónoma de la forma (1). Esta versión de la teoría es más sencilla y más transparente, aunque la existencia de la función es más limitada.

**Teorema 9.3.1.** *Sea  $M$  un conjunto compacto en un espacio localmente compacto  $(X, d)$  (en particular,  $\mathbb{R}^n$ ) y un sistema (semi-)dinámico definido en  $X$ . Entonces la existencia de una función continua  $v$  de  $X$  en  $\mathbb{R}^+$  con las propiedades*

$$v(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \notin M, \quad (5)$$

$$v(x_n) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad d(x_n, M) \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$y \in \gamma^+(x) \quad \text{implica} \quad v(y) \leq v(x) \quad (7)$$

$$[d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\}]$$

*es suficiente y necesaria para la estabilidad de  $M$ .*

**Demostración. Suficiencia:** Suponga  $M$  inestable. Entonces, debido a la compacidad de  $M$  y compacidad local de  $X$ , existen puntos  $x \in M$  y  $y \notin M$  y sucesiones  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$  tales que  $y_n \in \gamma^+(x_n)$ .<sup>3</sup> Ahora (6) implica  $v(x_n) \rightarrow 0$ , mientras que (7) da  $0 < v(y_n) \leq v(x_n)$ , luego  $v(y_n) \rightarrow 0$ , lo cual por la continuidad de  $v$  daría  $v(y) = 0$ , contrario a (5).

**Necesidad:** Sea  $M$  estable. Entonces, (siguiendo T. Yoshizawa, [7]) definimos

<sup>3</sup>Se dice  $y$  está contenido en la *prolongación* de  $x$ , según una terminología introducida por T. Ura, extendiendo un concepto usado por H. Poincaré. (Véase [7]).

$$v(x) = \sup\{d(z, M) \mid z \in \gamma^+(x)\}.$$

Por transitividad de la relación  $\gamma^+$ ,  $y \in \gamma^+(x)$  implica  $\gamma^+(y) \subset \gamma^+(x)$ , en consecuencia  $v(y) \leq v(x)$ , o sea, la condición (7). La condición (5) se satisface obviamente, y (6) sigue fácilmente de la estabilidad de  $M$ .  $\square$

## 9.4. Generalización.

Las posibles aplicaciones del método de Lyapunov se extienden mucho más allá del dominio de las ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de dimensión finita debido al hecho de que sus resultados siguen siendo válidos para sistemas en espacios muy generales. El propósito de esta sección es mostrar el alcance de la función de Lyapunov en un contexto abstracto, el cual no obstante, permite aplicaciones a situaciones muy concretas.

### 9.4.1. Definiciones y notaciones generales.

Sea  $X$  un conjunto no vacío, y denotemos por  $\mathfrak{X}$  el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de  $X$ . Luego, consideremos una función

$$\Phi : X \rightarrow \mathfrak{X}.$$

Si  $A \subset X$ , definimos

$$\Phi(A) = \bigcup \{\Phi(x) \mid x \in A\}.$$

Cualquier colección no vacía  $\mathcal{E} \subset \mathfrak{X}$  se llama *cuasifiltro* sobre  $X$ . Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  dos cuasifiltros sobre  $X$ . Escribimos

$$\mathcal{D} \prec \mathcal{E}$$

(leído:  $\mathcal{D}$  es más burdo que  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}$  es más fino que  $\mathcal{D}$ ) si

$$\forall D \in \mathcal{D}, \exists E \in \mathcal{E} \text{ tal que } E \subset D.$$

Si tanto  $\mathcal{D} \prec \mathcal{E}$  como  $\mathcal{E} \prec \mathcal{D}$ , decimos que  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  son *equivalentes*, denotamos esto mediante el símbolo  $\mathcal{D} \succsim \mathcal{E}$ .

Se denotan las  $\epsilon$ -vecindades de un punto  $x$  o conjunto  $M$  por  $B_\epsilon(x)$ , respectivamente  $B_\epsilon(M)$  :

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\},$$

$$B_\epsilon(M) = \{y \in X \mid d(x, M) < \epsilon\},$$

donde  $d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\}$

### 9.4.2. Funciones de Lyapunov.

Dado un cuasifiltro  $\mathcal{D}$  sobre  $X$  y una función  $\Phi$  como arriba, definimos el siguiente cuasifiltro:

$$\Phi(\mathcal{D}) = \{\Phi(D) \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

**Definición 9.4.1.** Sean  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  dos cuasifiltros sobre  $X$ . Entonces  $\Phi$  es  $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ -estable si  $\mathcal{E} \prec \Phi(\mathcal{D})$ ; en particular, la  $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ -estabilidad se llamará *estabilidad con respecto a  $\mathcal{E}$* .

En particular, para obtener el concepto de estabilidad de Lyapunov, definido en la sección 3, se elige como cuasifiltro  $\mathcal{D}$ , igual como para  $\mathcal{E}$ , el filtro de vecindades de  $M$ .

Ahora consideremos una función

$$v : X \rightarrow [0, \infty]$$

y definimos, para cada  $\beta > 0$ , el conjunto

$$S_v^\beta = \{x \in X \mid v(x) < \beta\}$$

y para toda función  $v$ , la colección de conjuntos

$$\mathcal{S}_v = \{S_v^\beta \mid S_v^\beta \neq \emptyset\},$$

la cual es un cuasifiltro a menos que  $v$  sea idénticamente igual a  $\infty$ .

Llamamos  $v$  una *función de Lyapunov* para la cuaterna  $(X, \Phi, \mathcal{D}, \mathcal{E})$  si y sólo si valen las siguientes condiciones:

$$\mathcal{E} \prec \mathcal{S}_v, \tag{8}$$

$$\mathcal{S}_v \prec \mathcal{D}, \tag{9}$$

$$(\forall \beta > 0) \Phi(S_v^\beta) \subset S_v^\beta. \tag{10}$$

Las primeras dos condiciones significan que  $v$  no toma valores arbitrariamente pequeños fuera de cualquier conjunto  $E \in \mathcal{E}$ , y que  $v$  posee cotas arbitrariamente pequeñas en conjuntos  $D \in \mathcal{D}$ . La última condición significa que  $v$  es *no-creciente con respecto a  $\Phi$* , i.e.  $y \in \Phi(x) \implies v(y) \leq v(x)$ .

### 9.4.3. Condiciones suficientes para la estabilidad.

**Teorema 9.4.2.** Si existe una función de Lyapunov  $v$  para  $(X, \Phi, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ , entonces  $\Phi$  es  $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ -estable.

**Demostración.** Primero demostraremos que (9) y (10) implican

$$\mathcal{S}_v \prec \Phi(\mathcal{D}). \quad (11)$$

En realidad, dado  $\beta > 0$  tal que  $S_v^\beta \neq \emptyset$ , (9) implica que

$$\exists D \in \mathcal{D} \quad \text{tal que} \quad D \subset S_v^\beta.$$

Esto, con (10) [y tomando en cuenta que  $A \subset B$  obviamente implica que  $\Phi(A) \subset \Phi(B)$ ], dando

$$\Phi(D) \subset \Phi(S_v^\beta) \subset S_v^\beta,$$

y puesto que  $\Phi(D) \subset \Phi(\mathcal{D})$  por definición, se sigue (11).

Ahora siendo la relación  $\prec$  claramente transitiva, (8) y (11) juntas implican  $\mathcal{E} \prec \Phi(\mathcal{D})$ , lo cual demuestra la estabilidad.  $\square$

#### 9.4.4. El primer teorema inverso.

Primero introducimos una condición adicional concerniente a cuasifiltros. Un cuasifiltro  $\mathcal{A}$  será llamado *admisble* si es equivalente a un cuasifiltro  $\mathcal{B}$  de la forma  $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ , donde  $I$  denota un subconjunto de  $(0, \infty)$  la cerradura del cual contiene el origen, y  $\{B_i\}$  es monótona creciente.

**Teorema 9.4.3.** *Si la relación  $y \in \Phi(x)$  es reflexiva, transitiva y  $\mathcal{E}$  es admisble, entonces la  $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ -estabilidad de  $\Phi$  implica la existencia de una función de Lyapunov  $v$  para  $(X, \Phi, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $\mathcal{E}$  es equivalente a  $\mathcal{B}$  (como especificado arriba). Entonces definimos la función  $v$  como sigue:

$$v(x) = \inf\{j \in I \mid \Phi(x) \subset B_j\}. \quad (12)$$

Si  $\Phi(x)$  no está contenido en ningún  $B_j$ , ponemos  $v(x) = \infty$ .

Primero verificamos (9): Sea  $\beta > 0$ ; entonces, puesto que  $0 \in \bar{I}$ , existe un  $i \in I$  tal que  $i < \beta$ . Siendo  $\mathcal{B} \prec \mathcal{E}$ , existe  $E \in \mathcal{E}$  tal que  $E \subset B_i$ . Ahora, la estabilidad implica que

$$\exists D \in \mathcal{D} \quad \text{tal que} \quad \Phi(D) \subset E \subset B_i,$$

y entonces (12) da  $v \leq i < \beta$  sobre  $D$ , o  $D \subset S_v^\beta$ . Puesto que  $S_v$  contiene obviamente sólo conjuntos de la forma  $S_v^\beta$  con  $\beta > 0$ , se obtiene (9). Como un resultado incidental, tenemos

$$\beta > 0 \implies S_v^\beta \neq \emptyset. \quad (13)$$

La relación (8) es equivalente a

$$\forall E \in \mathcal{E}, \exists j \in I \text{ tal que } \emptyset \neq S_v^j \subset E.$$

Puesto que  $\mathcal{E} \prec \mathcal{B}$ , existe  $j \in I$  tal que para cada  $E$

$$B_j \subset E. \quad (14)$$

Además, para cualquier  $x \in S_v^j$ ,  $v(x) < j$ , y, entonces (12) implica que  $\Phi(x) \subset B_j$ . Ahora, por la reflexividad de  $\Phi$ , (14) da  $x \in \Phi(x) \subset E$ . Entonces, por (6),  $\emptyset \neq S_v^j \subset E$ .

**Demostración de (10):** Supongamos que  $y \in \Phi(x)$ ; entonces la transitividad de  $\Phi$  implica  $\Phi(y) \subset \Phi(x)$ , y de (12) se tiene  $v(y) < v(x)$ , lo cual equivale a (10).  $\square$

**Ejemplo 9.4.4.** Sea  $M$  un conjunto cerrado en un espacio métrico  $X$  en el cual un sistema dinámico o semidinámico está dado. Entonces definimos:

$M$  es *estable* si para todo  $\epsilon > 0$  y  $x \in M$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\gamma^+(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(M).$$

Aquí  $\Phi$  es la semiórbita  $\gamma^+$  y se definen

$$\mathcal{D} = \{B_\delta(x) \mid \delta > 0, x \in M\},$$

$$\mathcal{E} = \{B_\epsilon(M) \mid \epsilon > 0\}.$$

El cuaifiltro  $\mathcal{E}$  es admisible, mientras que  $\mathcal{D}$  no lo es, y la función  $v$  definida por (12) toma la forma

$$v(x) = \inf\{\epsilon \in (0, \infty] \mid \gamma^+(x) \subset B_\epsilon(M)\} \quad (15)$$

( $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{E}$  son el mismo).

#### 9.4.5. El segundo teorema inverso.

Si la relación  $y \in \Phi(x)$  es reflexiva, entonces  $\Phi$  tiene inversa,  $\Phi^*$ , i.e. una función

$$\Phi^* : X \rightarrow \mathfrak{X}$$

tal que

$$x \in \Phi(y) \iff y \in \Phi^*(x).$$

Además, si alguna de estas relaciones es transitiva, también lo es la otra.

$$\text{Si } A \subset X, \text{ escribimos } A^* \text{ para } X \setminus A.$$

**Proposición 9.4.5.** Si la relación definida por  $\Phi$  es reflexiva,

$$\Phi(D) \subset E \iff \Phi^*(E^*) \subset D^*.$$

La demostración es elemental y se deja como un ejercicio para el lector.

Ahora podemos formular el siguiente teorema que complementa el anterior.

**Teorema 9.4.6.** Si  $\Phi$  es reflexivo y transitivo, y  $\mathcal{D}$  es admisible, entonces la  $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ -estabilidad de  $\Phi$  implica la existencia de una función de Lyapunov  $v$  para  $(X, \Phi, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ .

**Demostración.** Sea  $\mathcal{B}$  como en la definición de admisibilidad y definimos la función  $v$  como sigue:

$$v(x) = \sup\{j \in I \mid \Phi^*(x) \cap B_j = \emptyset\}. \quad (16)$$

Si  $\Phi^*(x)$  intersecta todos los  $B_j$ 's, ponemos  $v(x) = 0$ .

*Demostración de (9):* Dado  $\beta > 0$ , elegimos  $i \in I$  tal que  $i < \beta$ ; puesto que  $\Phi^*$  es reflexiva,  $\Phi^*(x)$  trivialmente intersecta  $B_i$  para cualquier  $x \in B_i$ . Por lo tanto  $v \leq i < \beta$  sobre  $B_i$ , o  $B_i \subset S_v^\beta$ . Siendo que  $B_i \in \mathcal{B} \prec \mathcal{D}$ , se sigue que  $S_v \prec \mathcal{D}$ . Esto es (9). Además, puesto que  $\beta > j > 0$  implica  $S_v^j \subset S_v^\beta$ , otra vez (13) es válida.

*Demostración de (8):* Dado  $E \in \mathcal{E}$ , elegimos  $D \in \mathcal{D}$  tal que  $\Phi(D) \subset E$ ; por la proposición, esto es equivalente a  $\Phi^*(E^*) \subset D^*$ , o

$$x \in E^* \implies \Phi^*(x) \cap D = \emptyset. \quad (17)$$

Después, elegimos  $j \in I$  tal que  $B_j \subset D$ ; entonces para  $x \in E^*$ , (17) implica que  $\Phi^*(x) \cap B_j = \emptyset$ , y ahora (16) da  $v(x) \geq j$ ; consecuentemente,  $E^* \subset S_v^{j*}$ , lo cual es equivalente a  $S_v^j \subset E$ . Además,  $S_v^j \neq \emptyset$ , por (13), i.e.  $S_v^j \in \mathcal{S}_v$  y (8) se sigue.

Finalmente, si fuera  $y \in \Phi(x)$  y  $v(y) > v(x)$ , por (16) existiría  $j$  tal que

$$\Phi(x) \cap B_j = \emptyset$$

y

$$\Phi(y) \cap B_j \neq \emptyset;$$

pero por la transitividad de la relación  $\Phi$  vale  $\Phi(y) \subset \Phi(x)$ , por cual razón la segunda relación no sería compatible con la primera. Esto prueba que  $v$  es creciente bajo  $\Phi$ , o sea, que vale (10).  $\square$

**Ejemplo 9.4.7.** En el mismo contexto del ejemplo(9.4.4) el conjunto  $M$  lo decimos *preestable* (también conocido como *condición de Zubov*) si para cada  $x \in M$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \notin \gamma^+(B_\delta(M)).$$

En este caso definimos:

$$\mathcal{D} = \{B_\delta(M) \mid \delta > 0\}$$

y

$$\mathcal{E} = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X \setminus M\}.$$

Aquí  $\mathcal{D}$  es admisible y  $\mathcal{E}$  no. La función  $v$  de (16) es de la forma

$$v(x) = \sup\{j \in I \mid \gamma^-(x) \cap B_j(M) = \emptyset\}. \quad (18)$$

En el caso de un sistema semidinámico, se define  $\gamma^-(x)$  como el conjunto de todos los puntos  $y$  tales que  $x \in \gamma^+(y)$ .

*Nota.* En el caso de  $M$  compacto y de un sistema dinámico, la preestabilidad es equivalente a la condición de que  $M$  no contenga puntos límites negativos de órbitas fuera de  $M$ . La preestabilidad obviamente es necesaria para la estabilidad, pero no suficiente, siendo el ejemplo más sencillo el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 0.$$

Aquí el origen es inestable, pero no es punto límite de ninguna órbita fuera de él. La cuestión de bajo cuales condiciones adicionales la preestabilidad implica la estabilidad ha sido discutido ampliamente en la literatura, siendo el resultado más completo el del artículo [9].

Otro concepto importante de estabilidad de un conjunto cerrado es el siguiente:

$M$  es *uniformemente estable* si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\gamma^+(B_\delta(M)) \subset B_\epsilon(M).$$

En este caso los cuasifiltros  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  coinciden con el de las vecindades

$$\{B_\beta(M) \mid \beta > 0\}.$$

La función  $v$  que corresponde al primer teorema inverso, o sea (12), toma la forma

$$v(x) = \inf\{\beta > 0 \mid \gamma^+(x) \subset B_\beta(M)\}; \quad (19)$$

la que corresponde al segundo teorema inverso, o sea (16), toma la forma

$$v(x) = \sup\{\beta > 0 \mid \gamma^-(x) \cap B_\beta(M) = \emptyset\}. \quad (20)$$

#### 9.4.6. Acotación.

Introducimos la siguiente definición.

**Definición 9.4.8.** Dados dos cuasifiltros  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$ , decimos que  $\mathcal{E}$  *domina* a  $\mathcal{D}$  si

$$(\forall D \in \mathcal{D}) (\exists E \in \mathcal{E}) D \subset E,$$

escribiendo esta relación como  $\mathcal{D} \prec \mathcal{E}$  ( $\mathcal{D}$  *dominado por*  $\mathcal{E}$ ).



**Proposición 9.4.9.** *La relación de dominancia,  $\prec$ , es reflexiva y transitiva.*

**Demostración.** Es claro que,  $\prec$ , es reflexiva. Por otra parte, como consecuencia inmediata de la transitividad de  $\subset$ ,

$$\mathcal{D} \prec \mathcal{E} \prec \mathcal{F} \implies \mathcal{D} \prec \mathcal{F}.$$

□

Si  $\mathcal{D}$  es un cuasifiltro, el *co-cuasifiltro*  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathcal{D}$  es el cuasifiltro que consiste de todos los complementos  $D^*$  no vacíos de elementos  $D$  de  $\mathcal{D}$ .

**Proposición 9.4.10** (Principio de dualidad).

$$\mathcal{D} \prec \mathcal{E} \iff \mathcal{D}^* \prec \mathcal{E}^*.$$

**Demostración.** Si  $\mathcal{D} \prec \mathcal{E}$ , vale

$$(\forall D \in \mathcal{D})(\exists E \in \mathcal{E}) E \subset D,$$

lo cual es equivalente a  $D^* \subset E^*$ ; así que

$$\mathcal{D} \prec \mathcal{E} \iff (\forall D^* \in \mathcal{D}^*)(\exists E^* \in \mathcal{E}^*) D^* \subset E^* \iff \mathcal{D}^* \prec \mathcal{E}^*.$$

□

Llamamos *ultracuasifiltro* sobre  $X$  el cuasifiltro  $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ . Es el (único) cuasifiltro que es *más fino que cualquier cuasifiltro sobre  $X$* . El co-cuasifiltro de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}^*$  es el, *co-ultracuasifiltro* sobre  $X$ . (El cuasifiltro  $\mathcal{E}$  del ejemplo 9.4.7 es el co-ultracuasifiltro sobre  $X$ ).

**Definición 9.4.11.** Si  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{E}$  son dos cuasifiltros sobre un conjunto  $X$  dotado de una función  $\Phi$  como en subsección 4.1, decimos que  $\Phi$  es  $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ -*acotado* si, para cada  $D \in \mathcal{D}$ , existe un  $E \in \mathcal{E}$  tal que  $\Phi(D) \subset E$ ; en forma escueta, si

$$\Phi(\mathcal{D}) \prec \mathcal{E}.$$

[Recordemos que  $\Phi(\mathcal{D}) = \{\Phi(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$ .] En particular, si  $\mathcal{E}$  es el cuasifiltro  $\mathcal{B}$  que consiste de todos los subconjuntos (no vacíos) acotados de  $X$ , suponiendo este normado, decimos que  $\Phi$  es *acotado sobre  $\mathcal{D}$* .

Si, además,  $\mathcal{D}$  es el ultracuasifiltro sobre  $X$ , el concepto de acotación que resulta coincide con lo que se conoce como *estabilidad en el sentido de Lagrange*.

Si, por otro lado, tanto  $\mathcal{D}$  como  $\mathcal{E}$  coinciden con  $\mathcal{B}$ , resulta lo que se llama *equiacotación* [7].

A través del principio de dualidad corresponde a cada teorema de estabilidad un teorema sobre acotación. Las propiedades de acotación usando funciones análogas a las de Lyapunov fueron estudiados particularmente por Yoshizawa (ver [8]).

**Ejemplo 9.4.12.**

Consideremos el sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x(1 - y^2) \\ \dot{y} &= -y(1 + 2x^2).\end{aligned}\tag{21}$$

Buscamos una función de Lyapunov dentro de la clase de las formas cuadráticas (las cuales son las de uso más común):

$$v(x, y) = ax^2 + by^2 \quad (a > 0, b > 0),$$

cuya derivada total  $\dot{v}(x, y) = \nabla v \cdot f(x, y)$  [el punto significa el producto escalar y la función  $f$  es la de (1), aplicada al vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ], resulta:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} \\ &= -2[ax^2(1 - y^2) + by^2(1 + 2x^2)] \\ &= -2[v(x, y) - (a - 2b)x^2y^2].\end{aligned}$$

Poniendo  $a = 2$ ,  $b = 1$ , resulta

$$\dot{v}(x, y) = -2v(x, y).$$

Eligiendo una solución no trivial,  $(x(t), y(t))$ , ponemos  $w(t) = v(x(t), y(t))$ . Entonces

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \dot{v}(x(t), y(t)) \\ &= -2w(t),\end{aligned}$$

o sea,

$$w(t) = w(0)e^{-2t},$$

lo cual implica que todas las soluciones no triviales tienden a cero exponencialmente: el origen es globalmente asintóticamente estable (y en particular, exponencialmente). Ver Figura 9.1.

**Ejemplo 9.4.13.**

Dado el sistema diferencial en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y(x^2y^2 - 1).\end{aligned}\tag{22}$$

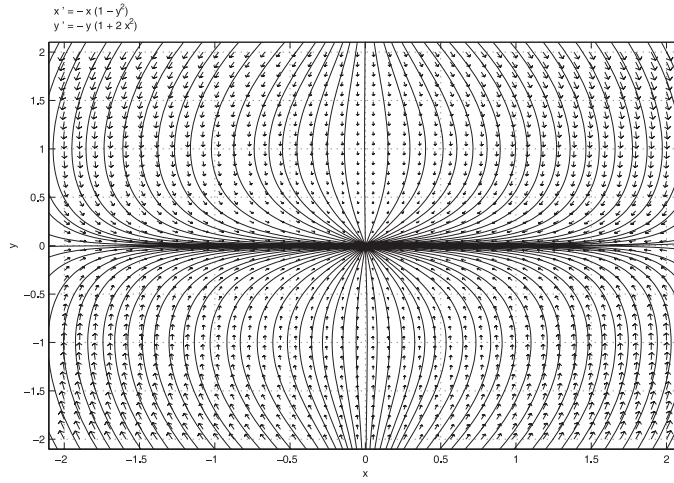


Figura 9.1:

Consideremos la función <sup>4</sup>

$$w(x, y) = x^2 y^2,$$

cuya derivada total es

$$\begin{aligned} \dot{w} &= 2x\dot{x} + 2x^2 y \dot{y} \\ &= 2x^2 y^2 (x^2 y^2 - 2). \end{aligned}$$

El signo de ella es el de  $x^2 y^2 - 2$ , o sea,  $w(x, y) - 2$ , lo cual tiene las consecuencias siguientes:

1. Las curvas definidas por la ecuación  $x^2 y^2 = 2$  forman una variedad invariante del sistema (constan de órbitas enteras).
2. Las órbitas que empiezan en la región  $x^2 y^2 > 2$  no son acotadas porque  $w$  no es acotada a lo largo de ellas).
3. Las órbitas que se inician en la región  $x^2 y^2 < 2$ , tienden hacia el eje  $x$ ; para ver si tienden hacia el origen observamos que, según la segunda ecuación,  $\dot{y}$  cambia

<sup>4</sup>Se trata de una función de Lyapunov para la unión de los dos ejes de coordenadas.

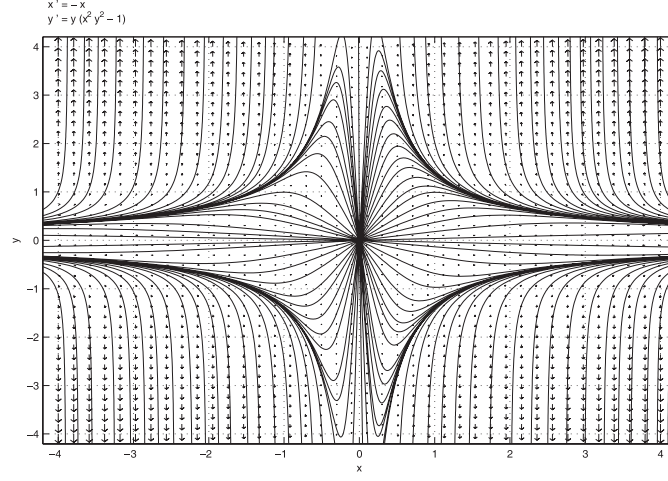


Figura 9.2:

de signo al cruzar la órbita la curva  $x^2 y^2 = 1$ : para  $x^2 y^2 > 1$   $\dot{y}$  tiene el signo de  $y$ , se aleja del eje  $y$ ; una vez cruzada dicha curva, toma el signo opuesto al de  $y$ , va hacia el eje  $y$ , y por ende hacia el origen.

En resumen, la vecindad del origen limitada por la variedad invariante  $x^2 y^2 = 2$  es la *región de atracción* del origen: todas las órbitas dentro de ella tienden hacia el origen para  $t \rightarrow +\infty$ , mientras las que se encuentran fuera de la misma no son acotadas (no son Lagrange estables). (Ver figuras 9.2 y 9.3.)

Este ejemplo ilustrativo, y en cierto sentido paradigmático, se presentó originalmente en el artículo [10].

## 9.5. Regiones de transición y conjuntos de permanencia.

Se considera un sistema (semi)dinámico sobre un espacio métrico  $(X, d)$ .

**Definición 9.5.1.** El *conjunto límite prolongacional* positivo de un punto  $x$ , denotado por  $J^+(x)$ , es el conjunto de todos puntos para los cuales existen sucesiones  $x_n \rightarrow x$  y  $t_n \rightarrow +\infty$  tales que  $x_n t_n \rightarrow y$ , o equivalente,

$$J^+(x) = \bigcap \{ \overline{B_\epsilon(x)[t, \infty)} \mid \epsilon > 0, t > 0 \}.$$

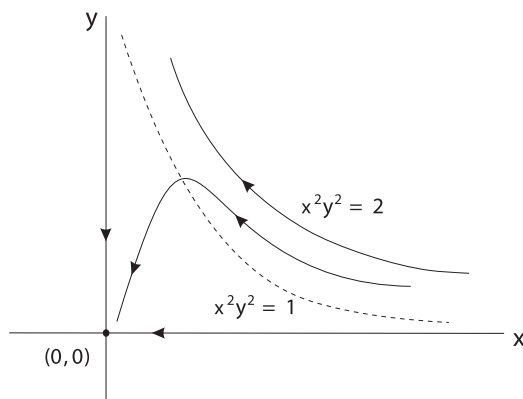


Figura 9.3:

La última expresión muestra que  $J^+(x)$  es *cerrado*; además, se verifica fácilmente que es *invariante* [6].

**Definición 9.5.2.** El punto  $x$  es *errante* si  $x \notin J^+(x)$ , en caso contrario *no errante*.

**Proposición 9.5.3.** Los punto límites positivos son no-errantes.

**Demostración.** Sea  $y$  un punto límite positivo de  $x$ . Entonces existe una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $xt_n \rightarrow y$ . Pasando, en caso de necesidad, a una subsucesión de  $(t_n)$ , podemos suponer  $t_{n+1} - t_n = s_n \geq n$ . Poniendo  $xt_n = x_n$ , tenemos  $x_n \rightarrow y$  y  $x_n(t_{n+1} - t_n) = x_n s_n = x t_{n+1} \rightarrow y$ . Ya que  $s_n \rightarrow +\infty$ , se sigue que  $y \in J^+(y)$ .

**Definición 9.5.4.** Un conjunto  $M$  es un *atractor* si posee una vecindad  $A$  con la propiedad que para cada punto  $x \in A$  vale  $\emptyset \neq L^+(x) \subset M$ , donde  $L^+$  denota el conjunto límite positivo. El máximo tal conjunto  $A$  es la *región de atracción* de  $M$ .

La región de atracción es un conjunto abierto ([10], [6]).

**Definición 9.5.5.** La *región de atracción uniforme* del conjunto  $M$ , denotado  $A_u(M)$ , es el conjunto de todos los puntos  $x$  tales que  $\emptyset \neq J^+(x) \subset M$ .—El conjunto  $M$  es un *atractor uniforme* si  $A_u(M)$  es una vecindad de  $M$ .

Una definición alternativa, más intuitiva, es la siguiente: un punto  $x$  pertenece a  $A_u(M)$  si, dada una vecindad  $U$  de  $M$ , existe una vecindad  $V$  de  $x$  y un tiempo  $t$  tal que  $V[t, \infty) \subset U$ . (En realidad, se trata de una uniformidad *local*: en una vecindad de cada punto.)

**Proposición 9.5.6.** La región de atracción uniforme de un conjunto, con exclusión de este, consiste de puntos errantes.

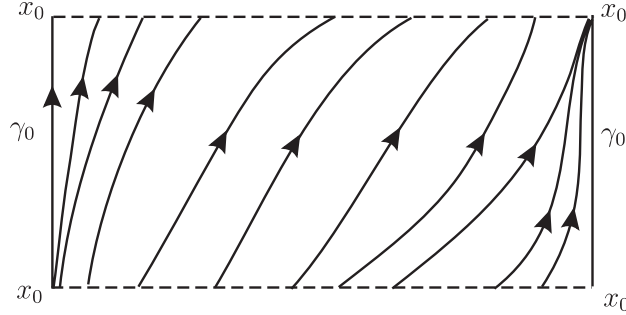


Figura 9.4:

Esto es obvio, pues siendo  $x \in A_u(M)$ ,  $x \notin M$  y  $J^+(x) \subset M$ , vale  $x \notin J^+(x)$ .

Intuitivamente, uno espera que todos los puntos de la región de atracción (con exclusión del conjunto  $M$  mismo) sean errantes. Curiosamente, esto no es el caso, como lo muestra el siguiente ejemplo que se debe a C. Perelló (Ver [11]).

Considérese un flujo sobre un toro que contiene un monógono de caminos que consiste de un punto crítico  $x_0$  y una órbita  $\gamma_0$  que no es contractible a  $x_0$ . Se supone que todas las demás soluciones se acumulan sobre  $\overline{\gamma_0}$  para  $t \rightarrow -\infty$  y tienden a  $x_0$  para  $t \rightarrow +\infty$  (Figura 9.4). Obviamente  $x_0$  es un atractor global, pero no uniforme: fijémonos en un punto  $x \in \gamma_0$ . Dada una vecindad  $U$  de  $x_0$ , las órbitas que se acumulan en  $x_0$  por el lado izquierdo de la figura, tardan tiempos arbitrariamente largos para reentrar en  $U$ . De hecho,  $x$  es no errante: dada una vecindad  $V$  de  $x$  y tomando una sucesión de puntos que se acumulan en  $x$  por el lado derecho de  $\gamma_0$  en la figura, ellos tardan lapsos arbitrariamente largos para reentrar en  $V$ .

Ahora consideramos una función continua  $v$  de  $X$  en  $\mathbb{R}^+$  que es no creciente bajo un flujo determinado sobre  $X$ . Esta función es necesariamente *constante a lo largo de las órbitas no errantes*. Pues supóngase  $x$  no errante  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n t_n \rightarrow x$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ . Si, para algún  $t > 0$  fuera  $v(xt) < v(x)$ , necesariamente

$$v(x_n t_n) \leq v(x_n t) \rightarrow v(xt) < v(x),$$

mientras  $x_n t_n \rightarrow x$  implica  $v(x_n t_n) \rightarrow v(x)$ , lo cual sería imposible.

Denotamos por  $E$  el conjunto de los puntos errantes y por  $N$  el de los no-errantes. Entonces definimos la función siguiente:

$$v(x) = \sup\{d(xt, N) \mid t \geq 0\}.$$

Esta es una función continua no creciente a lo largo de las órbitas que separa nítidamente las partes errantes (o sea, de transición) de las no errantes (de permanencia):

en  $E : v > 0$ , en  $N : v = 0$ .

Esto es otro principio extremal para la descripción de la dinámica de un sistema.

# Bibliografía

- [1] LIAPUNOV, A.M., *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Math. Studies 17, Princeton 1949. [Original en ruso:1892.]
- [2] POINCARÉ, H., *New Methods of Celestial Mechanics*, ed.& introd. by D.L. Gorof, Amer. Inst. of Physics (Original: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, 1892-1899).
- [3] NEMYTSKII, V. V.; STEPANOV, V.V. , *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, 1960. [Original: Leningrado, 1957.]
- [4] BIRKHOFF, G.D., *Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques*, Bull. Soc. Math. France 40 (1912), 1-19.
- [5] ZUBOV, V.I., *Methods of A.M. Liapunov and their Application*, Noordhoff, Groningen, 1964. [Original: Leningrado, 1957.]
- [6] LEFSCHETZ, S., *Liapunov and stability in dynamical systems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 3 (1958), 25-39.
- [7] BHATIA, N.P.; SZEGÖ, G.P., *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1970.
- [8] YOSHIZAWA, T., *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Math. Soc. Japan, 1966.
- [9] ARREDONDO, J. H.; SEIBERT, P., *On the flow outside an unstable equilibrium point or invariant set*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 9 (2003), 245-256.
- [10] SEIBERT, P., *On stability relative to a set and to the whole space*, Izvest. Inst. Mat. Nauk USSR, vol. II (1970) 448-457.
- [11] AUSLANDER, J.; BHATIA, N.P.; SEIBERT, P., *Attractors in dynamical systems*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 9 (1964), 55-66.





## Capítulo 10

# Euler y el Análisis Matemático

Jaime Navarro <sup>1</sup> y David Elizarraraz Martínez <sup>2</sup>

### Resumen

En este capítulo se mostrará la relevancia del trabajo de Euler dentro del análisis matemático y el uso de su fórmula para definir las transformadas de Fourier, de ventana de Fourier y del Wavelet. Euler también trabajó en la teoría de grupos, la cual ayuda a obtener la fórmula de reconstrucción, por ejemplo para la transformada del wavelet. Finalmente, se mostrará que la imagen de la transformada del wavelet puede ser representada a través de un kernel, lo cual es un ejemplo del trabajo de Euler relacionado con las transformadas integrales.

### 10.1. Introducción

En 1748 Euler escribió la primera exposición unificada del cálculo infinitesimal y el análisis elemental en su obra de dos volúmenes titulada *Introductio in Analysin Infinitorum* [1]; en 1755 escribió su obra más amplia *Institutiones Calculi Differentialis* [2] y de 1768 a 1770 los tres volúmenes de *Institutiones Calculi Integralis* [3], [4], [5]. Estos libros son la fuente original de gran parte del contenido y de los métodos usados en los cursos y en los libros de texto modernos relacionados con el Cálculo y también con las Ecuaciones Diferenciales. Además contenían todos algunas carac-

---

<sup>1</sup>Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, jnfu@correo.azc.uam.mx

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, dem@correo.azc.uam.mx

terísticas muy originales, sobre todo que la presentación y el desarrollo de los temas estaban basados en métodos analíticos más bien que geométricos.

En [1] Euler forjó una nueva rama de las Matemáticas: el análisis, manteniendo a un lado la geometría y el álgebra; desde el concepto de función y procesos al infinito hasta la representación e investigación de funciones. También aquí, encontramos por primera vez un tratamiento sistemático de logaritmos, exponenciales, funciones trigonométricas y un estudio de las funciones trascendentes elementales por medio de sus desarrollos en serie.

Podemos decir entonces que los trabajos de Euler han influido en el desarrollo de diversas ramas del análisis matemático, como son:

1. El análisis real, que estudia las funciones de valores reales, sus límites, continuidad, derivadas e integrales así como sucesiones y series de números reales y de funciones reales.
2. El análisis funcional, que estudia los espacios de funciones y en especial los espacios de Banach y de Hilbert.
3. El análisis armónico, que estudia las series de Fourier.

A continuación mostraremos el trabajo de Euler relacionado con el concepto de función, de las funciones trascendentes, de la teoría de grupos y finalmente de las transformadas integrales.

## 10.2. El concepto de función

En el siglo XVII los principales objetos de estudio fueron las curvas geométricas dentro del marco de la geometría Cartesiana. Las *variables* asociadas con una curva fueron exclusivamente cantidades geométricas como abscisas, ordenadas, longitud de arco, áreas entre la curva y los ejes coordenados, etc. Las relaciones entre estas cantidades fueron descritas frecuentemente por medio de ecuaciones.

La *Introductio* de Euler fue el primer trabajo en el cual el concepto de función juega un papel central. Al estudiar funciones más bien que curvas, Euler logró una separación del análisis infinitesimal de la geometría misma. Al principio de la *Introductio* escribe ([1], página 185, párrafo 4):

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma a partir de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes.

Euler aceptaba como operaciones en una “expresión analítica” las operaciones algebraicas básicas (incluyendo la solución de ecuaciones algebraicas) y varios procesos como tomar límites de sucesiones, sumas de series y productos y cocientes infinitos.

Su manejo aritmético del análisis infinitesimal fue tan completo que no aparecen dibujos o imágenes en el volumen I de su *Introductio* (el volumen II trata de geometría analítica).

Euler comienza con la noción de función algebraica, en la que las operaciones que se hacen sobre la variable independiente son únicamente algebraicas, las cuales a su vez se dividen en dos clases: racionales, en las que intervienen solamente las cuatro operaciones elementales, y las irracionales, en las que intervienen raíces. A continuación, introduce las funciones trascendentes, a saber, las trigonométricas, la logarítmica, la exponencial, las potencias de exponente irracional y ciertas integrales.

La principal diferencia entre las funciones, escribió Euler, consiste en la combinación de variables y constantes que las componen. Así, añade, las funciones trascendentes se distinguen de las algebraicas en que aquellas repiten un número infinito de veces las operaciones de éstas últimas. Es decir, las funciones trascendentes estarían dadas por series. Euler y sus contemporáneos no se planteaban la necesidad de considerar la validez de las expresiones obtenidas al aplicar infinitas veces las cuatro operaciones racionales.

Euler distinguía entre funciones implícitas y explícitas y entre funciones univaluadas y multivaluadas, siendo estas últimas las raíces de ecuaciones en dos variables de grado superior cuyos coeficientes son funciones de una variable. En este punto, señala que si una función tal como  $\sqrt[n]{f}$ , donde  $f$  es una función univaluada, toma valores reales para valores reales del argumento, entonces se podrá incluir en la mayoría de las ocasiones entre las funciones univaluadas. A partir de estas definiciones (que no están libres de contradicciones), Euler considera las funciones reales enteras o polinomios; estas funciones se pueden descomponer, afirma Euler, en factores de primero y segundo grado con coeficientes reales.

Por función continua, Euler entendía una función definida por una fórmula analítica. Su término “continua” significa en realidad analítica para nosotros.

La *Introductio* de Euler fue la primera obra en que se estableció el concepto de función como una noción básica sobre la que ordenar todo el material que contenían sus dos volúmenes. Algo del espíritu de este libro puede extraerse de sus observaciones sobre el desarrollo de funciones en series de potencias ([1], página 74). Allí afirma que cualquier función puede desarrollarse de ese modo, pero en seguida dice que

si alguien duda de que cualquier función puede desarrollarse así la duda quedará deshechada desarrollando de hecho la función. Sin embargo, con el fin de que la presente investigación abarque el dominio más amplio posible, además de las potencias enteras positivas de  $z$ , también se admitirán términos con exponentes arbitrarios. De este modo, es ciertamente evidente que cualquier función puede expresarse en la forma  $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \dots$ , donde los exponentes  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  pueden ser números cualesquiera. (ver [6]).

Para Euler, la posibilidad de desarrollar en serie todas las funciones estaba confirmada por su propia experiencia y la de sus contemporáneos y de hecho, era cierto en aquellos tiempos que todas las funciones dadas por expresiones analíticas admitían un desarrollo en serie.

Posteriormente, en el prefacio de *Institutiones Calculi Differentialis* ([2] página 4), Euler dio una definición de función más amplia que es prácticamente equivalente a la definición moderna:

Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que al cambiar estas últimas las primeras también cambian, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las primeras. Esta denominación es de naturaleza muy amplia y comprende todo método por medio del cual una cantidad podría estar determinada por otras. Si, por lo tanto,  $x$  denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de  $x$  de alguna manera o están determinadas por  $x$  son llamadas funciones de  $x$  (ver [7]).

En esta parte, es importante señalar que Euler introdujo la notación  $f(x)$  para denotar que  $f$  es una función que depende de la variable  $x$ .

### 10.3. Las funciones trascendentes

#### 10.3.1. Las funciones logaritmo y exponencial

Euler investigó las funciones logaritmo y exponencial en el capítulo *VII* de la *Introductio* ([1], páginas 122-132). A continuación daremos una breve descripción de sus métodos, enfatizando su desarrollo en serie de estas funciones.

Euler aceptaba la existencia de un número infinitamente grande  $i$  y uno infinitamente pequeño  $\omega$ , que utilizó con notable ventaja. En nuestra exposición reemplazaremos  $i$  por  $N$  y  $\omega$  por  $\epsilon$ , reservando  $i$  para la unidad imaginaria  $\sqrt{-1}$ . Euler no introdujo la ahora notación estándar  $i = \sqrt{-1}$  hasta más tarde en su carrera. Finalmente, emplearemos la variable independiente  $x$  en lugar de  $z$  que usó Euler habitualmente en sus trabajos.

En el Capítulo VI de [1] página 106, Euler ya había introducido el logaritmo de  $x$  con base  $a$  ( $\log_a x$ ), que denotó  $lx$ , como el exponente  $y$  tal que  $a^y = x$ . Esta fue la primera ocasión en la historia en que los logaritmos fueron interpretados como exponentes. Luego, al principio del Capítulo VII, observando que  $a^0 = 1$ , escribe

$$a^\epsilon = 1 + k\epsilon, \quad (1)$$

donde  $\epsilon$  es un número infinitamente pequeño y  $k$  es una constante que depende de  $a$ . En notación actual, se observa que

$$k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} = \frac{d}{dx}[a^x]_{x=0} = \log_e a.$$

Dado un número (finito)  $x$ , Euler introduce el número infinitamente grande  $N = \frac{x}{\epsilon}$ . De esto y la ecuación (1) concluye que:

$$a^x = a^{N\epsilon} = (a^\epsilon)^N = (1 + k\epsilon)^N,$$

y utilizando la serie binomial expresamos

$$a^x = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N \quad (2)$$

en la forma

$$a^x = 1 + N \left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!} \left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \dots,$$

es decir

$$a^x = 1 + kx + \frac{1}{2!} \frac{N(N-1)}{N^2} k^2 x^2 + \frac{1}{3!} \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} k^3 x^3 + \dots \quad (3)$$

Ya que  $N$  es infinitamente grande, el supone que

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \dots$$

En consecuencia la ecuación (3) se reduce a

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots \quad (4)$$

Sustituyendo  $x = 1$  en (4), obtiene la relación entre  $a$  y  $k$

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \dots \quad (5)$$

Euler ahora introduce su famoso número  $e$  como el valor de  $a$  para el cual  $k = 1$ ,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Identifica  $e$  como la base de los logaritmos naturales y escribe su representación decimal con 23 cifras

$$e = 2,71828182845904523536028.$$

La ecuación (2) entonces conduce a

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N,$$

la cual interpretamos actualmente como

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

así que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (6)$$

Por otra parte, con  $k = 1$  en la ecuación (4) se obtiene el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Regresando a los logaritmos, Euler escribe

$$1 + y = a^x = a^{N\epsilon} = (1 + k\epsilon)^N,$$

de modo que  $\log_a(1 + y) = N\epsilon$  y

$$\begin{aligned} 1 + k\epsilon &= (1 + y)^{1/N}, \\ \epsilon &= \frac{(1 + y)^{1/N} - 1}{k}, \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\log_a(1 + y) = N\epsilon = \frac{N}{k} [(1 + y)^{1/N} - 1]. \quad (7)$$

Si  $k = 1$  entonces  $a = e$  y reemplazando  $y$  por  $x$  en (7) se obtiene

$$\log_e(1 + x) = N[(1 + x)^{1/N} - 1], \quad (8)$$

lo cual expresamos en la actualidad como

$$\ln(1 + x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[(1 + x)^{1/n} - 1] \quad (9)$$

Euler obtuvo también el desarrollo en serie de potencias de  $\log_e(1 + x)$  usando la serie binomial en (8). Se tiene que

$$\begin{aligned} (1 + x)^{1/N} &= 1 + \frac{1}{N}x + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N} - 1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N} - 1)(\frac{1}{N} - 2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{N}x - \frac{1}{2!} \frac{N-1}{N^2}x^2 + \frac{1}{3!} \frac{(N-1)(2N-1)}{N^3}x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Y como

$$\frac{N-1}{N} = 1, \quad \frac{2N-1}{N} = 2, \quad \text{etc.,}$$

ya que  $N$  es infinitamente grande, Euler obtiene

$$\begin{aligned}\log_e(1+x) &= N[(1+x)^{1/N} - 1] \\ &= x - \frac{1}{2} \frac{N-1}{N} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{(N-1)(2N-1)}{N^2} x^3 - \dots,\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\log_e(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots. \quad (10)$$

### 10.3.2. Funciones seno y coseno

Antes de Euler el seno y el coseno eran longitudes de segmentos rectos relativos a una circunferencia dada de radio  $R$ . El seno de un ángulo  $A$  era la mitad de la cuerda del arco subtendido por un ángulo central  $2A$  y el coseno de  $A$  era igual a la longitud de la perpendicular desde el centro a esta cuerda.

En el capítulo VIII de la *Introductio* ([1], páginas 133-152), Euler definió las funciones seno y coseno como sigue:  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$  denotan el seno y el coseno del ángulo central en un círculo *unitario* que subtiende un arco de longitud  $\theta$ . Esto equivale a decir que  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$  son el seno y el coseno de un ángulo de  $\theta$  radianes en un círculo de radio uno.

Euler enseguida estableció las propiedades básicas:

$$\begin{aligned}\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x &= 1 \\ \text{sen}(A \pm B) &= \text{sen } A \text{cos } B \pm \text{sen } B \text{cos } A \\ \text{cos}(A \pm B) &= \text{cos } A \text{cos } B \mp \text{sen } A \text{sen } B\end{aligned}$$

Posteriormente, en la página 140 de [1], obtiene por inducción la “*Identidad de De Moivre*”:

$$(\cos z \pm i \text{sen } z)^n = \cos nz \pm i \text{sen } nz, \quad (11)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $n$  es un entero positivo.

Ahora bien sean  $\epsilon$  un número infinitamente pequeño y  $N$  un entero infinitamente grande. De (11) se sigue que

$$\cos N\epsilon + i \text{sen } N\epsilon = (\cos \epsilon + i \text{sen } \epsilon)^N$$

y

$$\cos N\epsilon - i \text{sen } N\epsilon = (\cos \epsilon - i \text{sen } \epsilon)^N.$$

Sumando y restando estas ecuaciones se obtiene

$$\cos N\epsilon = \frac{1}{2}[(\cos \epsilon + i \text{sen } \epsilon)^N + (\cos \epsilon - i \text{sen } \epsilon)^N] \quad (12)$$

y

$$\operatorname{sen} N\epsilon = \frac{1}{2i} [(\cos \epsilon + i \operatorname{sen} \epsilon)^N - (\cos \epsilon - i \operatorname{sen} \epsilon)^N]. \quad (13)$$

Euler desarrollo los lados derechos de (12) y (13) utilizando la serie binomial para obtener

$$\begin{aligned} \cos N\epsilon &= \cos^N \epsilon - \frac{N(N-1)}{2!} \cos^{N-2} \epsilon \operatorname{sen}^2 \epsilon \\ &\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!} \cos^{N-4} \epsilon \operatorname{sen}^4 \epsilon + \dots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} N\epsilon &= N \cos^{N-1} \epsilon \operatorname{sen} \epsilon - \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \cos^{N-3} \epsilon \operatorname{sen}^3 \epsilon \\ &\quad + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}{5!} \cos^{N-5} \epsilon \operatorname{sen}^5 \epsilon + \dots \end{aligned}$$

Finalmente, poniendo  $N\epsilon = x$  y sustituyendo  $\cos \epsilon = 1$ ,  $\operatorname{sen} \epsilon = \epsilon$ ,  $N = N-1 = N-2 = \dots$ , ya que  $\epsilon$  es infinitamente pequeño y  $N$  es infinitamente grande; Euler obtuvo las series trigonométricas

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (14)$$

y

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (15)$$

Además Euler obtuvo su famosa relación entre la exponencial y las funciones trigonométricas como sigue. Primero, escribe  $\epsilon = x/N$ ,  $\cos \epsilon = 1$  y  $\operatorname{sen} \epsilon = \epsilon = x/N$  en las ecuaciones (12) y (13), obteniendo

$$\cos x = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{ix}{N} \right)^N + \left( 1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right]$$

y

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i} \left[ \left( 1 + \frac{ix}{N} \right)^N - \left( 1 - \frac{ix}{N} \right)^N \right].$$

Pero recordando que

$$e^z = \left( 1 + \frac{z}{N} \right)^N,$$

las expresiones anteriores se reducen a

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (16)$$



y

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (17)$$

Claramente, de las ecuaciones (16) y (17) se deduce la *Fórmula de Euler*:

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x. \quad (18)$$

## 10.4. Series

Los trabajos sobre series comenzaron en toda su amplitud alrededor de 1730 con Euler, a quien el tema despertó gran interés.

En [8], Euler comienza con la serie (15) y deduce que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots &= \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots &= \frac{\pi^3}{32} \\ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots &= \frac{\pi^2}{96} \\ \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots &= \frac{5\pi^5}{1536} \\ \frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots &= \frac{\pi^6}{960} \end{aligned}$$

Posteriormente en [9], Euler obtuvo uno de sus resultados más sobresalientes,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n},$$

donde los  $B_{2n}$  son los números de Bernoulli. En realidad, la relación de los números de Bernoulli la estableció Euler un poco más tarde en el capítulo 5 de [2]. También calculó en [9] la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

para los primeros valores impares de  $n$ , aunque no obtuvo la expresión general para todo  $n$  impar.

Euler trabajó sobre series armónicas, es decir, series tales que los recíprocos de sus términos están en progresión aritmética. En particular en [10] demostró como se puede sumar un número finito de términos de la serie armónica común utilizando la función logaritmo. Comienza con

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots,$$

de donde

$$\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \cdots.$$

Tomando ahora  $x = 1, 2, 3, \dots, n$  obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots \\ \frac{1}{2} &= \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} - \frac{1}{5 \cdot 32} + \cdots \\ \frac{1}{3} &= \ln \frac{4}{3} + \frac{1}{2 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 27} + \frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{1}{5 \cdot 243} + \cdots \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} &= \ln \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5} + \cdots. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones y utilizando la propiedad  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ , se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} &= \ln(n+1) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{n^4}\right) - \cdots, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + K, \quad (19)$$

donde  $K$  representa la suma del conjunto infinito de sumas aritméticas finitas. El valor de  $K$  fue calculado aproximadamente por Euler, obtuvo  $K = 0,577218$ . Actualmente la constante  $K$  se conoce como constante de Euler, se denota por  $\gamma$  y se le representa como sigue: restando  $\ln n$  en ambos miembros de (19) y considerando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\ln(n+1) - \ln n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$  se deduce que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \quad (20)$$

No se ha encontrado por cierto, una forma más simple que (20) para la constante de Euler, mientras que disponemos de varias expresiones para  $\pi$  y  $e$ ; por otra parte, no se sabe si  $\gamma$  es un número racional o irracional.

Cabe hacer notar otro resultado célebre de Euler en el campo de las series. Jacques Bernoulli introdujo los hoy ampliamente usados números de Bernoulli, al buscar una

fórmula para las sumas de las potencias enteras positivas de los números enteros. Dio sin demostración la siguiente fórmula:

$$\sum_{k=1}^n k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 n^{c-3} \\ + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 n^{c-5} + \dots$$

La suma termina en la última potencia positiva de  $n$ . Los  $B_2, B_4, B_6, \dots$  son los números de Bernoulli. Además, Bernoulli encontró una relación de recurrencia que permite calcular esos coeficientes.

El resultado de Euler, conocido como la *fórmula de sumación de Euler-Maclaurin*, es una generalización. Ver [11] y [12]. Sea  $f(x)$  una función real de una variable real  $x$ . En notación moderna la fórmula se expresa así:

$$\sum_{i=0}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{2} [f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!} [f'(n) - f'(0)] \\ + \frac{B_4}{4!} [f'''(n) - f'''(0)] + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k, \quad (21)$$

donde

$$R_k = \int_0^n f^{(2k+1)}(x) P_{2k+1}(x) dx. \quad (22)$$

En (21) y (22)  $n$  y  $k$  son enteros positivos,  $P_{2k+1}(x)$  es el  $(2k+1)$ -ésimo polinomio de Bernoulli dado por

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1}{1!} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{B_2}{2!} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + \frac{B_k}{k!},$$

con  $B_1 = -1/2$  y  $B_{2k+1} = 0$  para  $k = 1, 2, \dots$ . La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)]$$

diverge para casi todas las funciones  $f$  que se presentan en las aplicaciones. Sin embargo, el residuo  $R_k$  es menor que el primer término que se desprecia, por lo cual la serie en (21) proporciona una aproximación útil de la suma  $\sum_{i=0}^n f(i)$ .

Los números de Bernoulli  $B_k$  se definen hoy, con frecuencia, mediante la siguiente relación dada más tarde por Euler

$$t(e^t - 1)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{t^i}{i!}.$$

### 10.4.1. Series trigonométricas

Una serie trigonométrica o serie de Fourier es una serie de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (23)$$

donde  $a_0, a_n$  y  $b_n$  son constantes, con  $l > 0$ , llamados los coeficientes de la serie de Fourier. Si tal serie representa una función  $f$  en el intervalo  $[-l, l]$ , entonces

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

La obtención de las fórmulas para los coeficientes fue uno de los resultados centrales de esta teoría.

Euler había abordado en el año 1729 el problema de la interpolación, o sea, dada una función  $f(x)$  cuyos valores para  $x = n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ , están prescritos, hallar  $f(x)$  para otros valores de  $x$ . En 1747 aplicó el método que había desarrollado a una función que aparece en la teoría de perturbaciones planetarias y obtuvo una representación en serie trigonométrica de la función; sus resultados aparecen en [13].

En primer lugar, Euler atacó el problema cuando las condiciones dadas son  $f(n) = 1$  para todo  $n$  y buscó una función periódica con valor de 1 para  $x$  entero. Toma  $f(x) = y$  y por el Teorema de Taylor escribe

$$f(x+1) = y + y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y''' + \dots$$

Como  $f(x+1) = f(x)$ , se tiene que  $y$  satisface la ecuación diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y''' + \dots = 0. \quad (24)$$

Ahora asocia a (24) la ecuación auxiliar

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots = 0, \quad (25)$$

la cual es equivalente a

$$e^z - 1 = 0,$$

o bien

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - 1 = 0. \quad (26)$$

A continuación aplica un teorema demostrado en [1] para determinar las raíces de (26). El polinomio del primer miembro tiene el factor lineal  $z$  y los factores cuadráticos

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{z}{n}\right) \cos \frac{2k\pi}{n} + 1, \quad k \in N, k < \frac{n}{2}.$$

Usando la identidad  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ , expresa estos factores cuadráticos en la forma

$$4\left(1 + \frac{z}{n}\right) \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n}\right) + \frac{z^2}{n^2}.$$

Las raíces de (25) no cambian si se divide cada factor cuadrático por  $4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n}\right)$ , de modo que los factores cuadráticos toman la forma

$$1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{4n^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n}\right)} \quad (27)$$

Con  $n = N$  (un valor entero infinitamente grande), el término  $z/n$  es cero y  $\sin \frac{k\pi}{n}$  se puede reemplazar por  $\frac{k\pi}{n}$ . Luego, los factores dados por (27) se convierten en

$$1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2} \quad (28)$$

A cada uno de los factores (28) le corresponden las raíces  $z = \pm 2k\pi i$  y en consecuencia la solución

$$\alpha_k \sin 2k\pi x + A_k \cos 2k\pi x$$

de (24). El factor lineal  $z$  antes mencionado da lugar a una solución constante y, dado que  $f(0) = 1$  es una condición inicial, Euler obtiene finalmente

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha_k \sin 2k\pi x + A_k (\cos 2k\pi x - 1)\},$$

donde los coeficientes  $\alpha_k$  y  $A_k$  han de ser tales que se satisfaga la condición de que  $f(n) = 1$  para todo  $n$ .

Este artículo contiene también un resultado que es formalmente idéntico a lo que llegaría a conocerse como desarrollo de Fourier de una función arbitraria, así como la determinación de los coeficientes mediante integrales. Concretamente, Euler demostró que la solución general de la ecuación funcional

$$f(x) = f(x-1) + X(x)$$

es

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x X(\xi) d\xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x \int_0^x X(\xi) \cos 2n\pi \xi d\xi \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\pi x \int_0^x X(\xi) \sin 2n\pi \xi d\xi \end{aligned}$$

Tenemos aquí una función expresada en serie trigonométrica en los años 1750-51.

En 1777 (ver [14]), trabajando en un problema de astronomía, Euler obtuvo de hecho los coeficientes de una serie trigonométrica utilizando la ortogonalidad de las funciones trigonométricas, tal y como se hace actualmente. Es decir, de la expresión

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad x \in [0, l] \quad (29)$$

dedujo que

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Euler había obtenido esto en el artículo inmediatamente anterior de una manera algo complicada, pero después se dio cuenta de que podía llegar al resultado directamente multiplicando los dos miembros de (29) por  $\cos \frac{n\pi x}{l}$ , integrando término a término y aplicando las relaciones

$$\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \sin \neq k \\ \frac{l}{2}, & \sin = k \neq 0 \\ l, & \sin = k = 0. \end{cases}$$

Actualmente la serie (29) se conoce como serie de Fourier y como vemos Euler ya trabajaba con este tipo de series antes que lo hiciera el mismo Fourier. Debido a esto, los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se denominan coeficientes de Euler o de Fourier.

## 10.5. Aplicación de la fórmula de Euler

Como ya hemos visto en las secciones anteriores, Euler sentó las bases del análisis matemático al generalizar su fórmula para conectar las funciones exponencial y trigonométricas. Las contribuciones de Euler a las notaciones matemáticas fueron las de emplear  $f(x)$  para las funciones (sección 2) y el símbolo  $\Sigma$  para sumatorias y series (sección 4).

Euler introdujo también el número  $e$  como límite de una sucesión (ver [11]) y unió los símbolos matemáticos más trascendentes como  $e$ ,  $\pi$ ,  $i$ ,  $0$ ,  $1$  mediante la siguiente ecuación

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (30)$$

conocida como la identidad de Euler.

Entre las aplicaciones de la fórmula de Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , ver (18), están las definiciones de las transformadas de Fourier, de ventana de Fourier y la del wavelet.

### 10.5.1. La Transformada de Fourier

En una dimensión, para analizar una señal  $f$  en el espacio fase, usamos  $\hat{f}$ , la transformada de Fourier de  $f$ , dada por

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i w x} f(x) dx \quad (31)$$

Se observa que para definir la transformada de Fourier, la fórmula de Euler es usada explícitamente, así como también el número  $\pi$ .

En muchas aplicaciones, dada una señal  $f$ , estamos interesados en su frecuencia para un tiempo determinado. Este hecho es similar a la notación musical, por ejemplo, ésta notación le indica al músico cual nota (frecuencia) tocar en un determinado momento (ver [15]).

También Euler contribuyó al estudio musical (ver [16]). Particularmente en 1739 Euler publicó el artículo *Tentamen Novae Theoriae Musicae*, en el cual hizo arreglos musicales y escribió:

...parte de las matemáticas y dedujo de manera ordenada desde principios correctos, que cualquier mezcla de tonos es placentera.

Sin embargo, en [16] se concluye que el trabajo de Euler fue:

...también para músicos avanzados en matemáticas y para matemáticos con conocimientos musicales.

### 10.5.2. La transformada de ventana de Fourier

Vemos entonces que la transformada de Fourier proporciona frecuencias globales de  $f$ , pero información con relación a la localización de altas frecuencias en un tiempo determinado no se obtiene tan directamente de  $\hat{f}$ . Para resolver este problema se introduce una función  $g(x - t)$  dependiendo solo del tiempo  $t$ , llamada ventana, para obtener la transformada de ventana de Fourier definida como

$$(V_g f)(w, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i w x} f(x) \bar{g}(x - t) dx \quad (32)$$

la cual es utilizada como un método de localización tiempo frecuencia.

Como podemos notar, también para definir la transformada de ventana de Fourier se usa nuevamente la fórmula de Euler.

### 10.5.3. La transformada del wavelet

Por otro lado, la transformada del wavelet para una señal dada  $f$  también es considerada como un método de localización tiempo frecuencia y como una alternativa para la transformada de ventana de Fourier. Para  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $b \in \mathbb{R}$ , la transformada del wavelet para una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  con respecto a una función admisible  $h$  se define como

$$(L_h f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \bar{h}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (33)$$

En este caso,  $h$  es admisible si

$$0 < C_h \equiv \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{|\hat{h}(k)|^2}{|k|} dx < \infty$$

Si ahora introducimos los operadores traslación, dilatación y modulación definidos respectivamente como

$$\begin{aligned} (T_t h)(x) &= h(x-t), \\ (J_a h)(x) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{x}{a}\right), \\ (E_w h)(x) &= e^{2\pi i w x} h(x), \end{aligned}$$

entonces para  $f, g, h \in L^2(\mathbb{R})$ , tanto la transformada de ventana de Fourier como la transformada del wavelet pueden ser escritas como productos internos dados respectivamente por

$$(V_g f)(w, t) = \langle f, E_w T_t g \rangle$$

y

$$(L_h f)(a, b) = \langle f, T_b J_a h \rangle$$

Notemos que aunque la transformada del wavelet ha sido definida como  $(L_h f)(a, b) = \langle f, T_b J_a h \rangle$ , no se ha empleado la fórmula de Euler. Sin embargo, ya que  $\widehat{T_b h} = E_{-b} \hat{h}$ , entonces para  $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ , la transformada del wavelet puede expresarse como

$$\begin{aligned} (L_h f)(a, b) &= \langle \hat{f}, \widehat{T_b J_a h} \rangle = \langle \hat{f}, E_{-b} \widehat{J_a h} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) \overline{E_{-b} \widehat{J_a h}(w)} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{-2\pi i w x} \overline{\widehat{J_a h}(w)} dw, \end{aligned}$$

o bien

$$(L_h f)(a, b) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} \overline{\widehat{J_a h}(w)} dw. \quad (34)$$



Es decir, también la fórmula de Euler es utilizada para definir la transformada del wavelet.

Observamos que la diferencia entre las transformadas de ventana de Fourier y del wavelet es con respecto a las funciones  $E_w T_t g$  y  $T_b J_a h$ . Para la transformada de ventana de Fourier, la anchura de  $E_w T_t g$  es la misma de  $g$  la cual es trasladada al tiempo propio de localización y llenada con altas frecuencias. El tamaño de la ventana  $E_w T_t g$  es la misma sin importar el ancho del valor de la frecuencia  $w$ . Por otro lado, las funciones  $T_b J_a h$  tienen anchura dependiendo de su frecuencia  $a$ . Es decir, para un valor fijo  $b_0$ , si  $a > 1$ , entonces  $T_{b_0} J_a h$  detecta bajas frecuencias y si  $0 < a < 1$ , entonces  $T_{b_0} J_a h$  determina altas frecuencias. Como consecuencia, la transformada del wavelet determina de una mejor manera que la transformada de ventana de Fourier la localización de altas y bajas frecuencias para un tiempo dado  $t$ . (ver [15]).

Por lo tanto, se ha mostrado que es necesario emplear la fórmula de Euler (18), para definir las transformadas de Fourier, de ventana de Fourier y del wavelet, dadas en (31), (32) y (34).

## 10.6. La fórmula de reconstrucción

En 1761, Euler estudió la aritmética modular. En particular él estudió los residuos de potencias de un número módulo  $n$ . Aunque el trabajo de Euler no está establecido en términos de la teoría de grupos, él dió un ejemplo de la descomposición de un grupo abeliano en clases laterales de un subgrupo. También él probó un caso especial del orden de un subgrupo siendo un divisor del orden de un grupo. Gauss en 1801 tomó el trabajo de Euler y le dió una gran extensión a la aritmética modular, la cual como consecuencia enriqueció la teoría de grupos abelianos. Gauss demostró que existe un subgrupo para cada número dividiendo el orden de un grupo cíclico (ver [17]).

Desde el punto de vista de grupos, podemos ver que para obtener una fórmula de reconstrucción respecto a la transformada del wavelet, es necesario usar el lenguaje de grupos y de representación de grupos. Para ver esto, consideremos

$$G = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Si en  $G$  definimos  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$ , entonces  $G$  es un grupo no abeliano donde la identidad es  $(1, 0)$  y el inverso de cada elemento en  $G$  está dado por  $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-1}b)$ . Además como  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{R}$  son grupos topológicos localmente compactos, se tiene que  $G$  es también un grupo topológico localmente compacto. Sabemos que en cada grupo topológico localmente compacto existen medidas invariantes por la izquierda y por la derecha llamadas las medidas de Haar, tenemos que en este caso, la medida de Haar por la izquierda y por la derecha están dadas respectivamente por

$$d(a, b) = \frac{1}{a^2} da db \quad \text{y} \quad d_1(a, b) = \frac{1}{|a|} da db$$

Por otro lado, si definimos la familia de operadores  $U(a, b) = T_b J_a$ , vemos que esta familia de operadores es una representación del grupo  $G$  actuando en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ . Esta representación actúa en  $L^2(\mathbb{R})$  de la siguiente manera: Para  $h \in L^2(\mathbb{R})$ , se tiene

$$U(a, b)h(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Esta representación es unitaria irreducible y fuertemente continua. Entonces podemos ahora aplicar el siguiente teorema a nuestra notación.

**Teorema 10.6.1.** (Grossman-Morlet-Paul, ver [18]). Si  $U$  es una representación unitaria, irreducible y fuertemente continua de un grupo topológico localmente compacto  $G$  actuando en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces para  $h$  admisible en  $L^2(\mathbb{R})$  y para  $f, g \in L^2(A)$  se tiene que

$$\int_G \langle f, U(a, b)h \rangle \overline{\langle g, U(a, b)h \rangle} d(a, b) = C_h \langle f, g \rangle \quad (35)$$

Por lo tanto si  $h \in L^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , entonces obtenemos la fórmula de reconstrucción en el sentido débil dada por

$$f = \frac{1}{C_h} \int_G (L_h f)(a, b) U(a, b) h d(a, b) \quad (36)$$

Notemos que de (36) se obtiene una relación de isometría dada por

$$\langle L_h f, L_h g \rangle = C_h \langle f, g \rangle. \quad (37)$$

Es decir, la teoría de grupos ha sido empleada para obtener la fórmula de reconstrucción en el caso particular de la transformada del wavelet.

## 10.7. Transformadas integrales

Las transformadas integrales aparecen dos veces en forma explícita en los trabajos de Euler. Se encuentran en un fragmento de [19] dedicado a una ecuación diferencial particular, publicado en 1763, y posteriormente en un capítulo de *Institutiones Calculi Integralis* [4], donde el tratamiento es más completo, más sistemático y más general. Ha sido ampliamente reconocido que estos documentos involucran transformadas integrales y de hecho se consideran el origen del concepto de transformada integral (ver [20]).

Una transformada integral es un mapeo que manda una función  $f(t)$  a otra  $F(p)$  mediante una integral definida

$$F(p) = \int_a^b K(t, p) f(t) dt \quad (38)$$

donde  $a, b$  son constantes, ver [21].

Las transformadas integrales son ampliamente usadas para resolver ecuaciones diferenciales, aunque su aplicación no se limita a este campo. Euler, sin embargo, las considero únicamente en este contexto. En su método, que aún se utiliza en nuestro días, inicia con una ecuación diferencial en  $F(p)$  y supone una solución de la forma (38). Al sustituir (38) en la ecuación se obtiene otra, que en los casos útiles es más simple que la primera, en donde la incógnita es  $f(t)$ . Dicho método podría considerarse como un caso particular de uno más general, también introducido por Euler, en el cual una ecuación diferencial en  $F(p)$  se resuelve proponiendo una solución de la forma

$$F(p) = \int_a^b \Phi(p, t) dt, \quad (39)$$

para alguna función  $\Phi$ .

Actualmente existe otro enfoque diferente. Dada una ecuación diferencial en la función incógnita  $f(t)$ , ésta se transforma mediante (38), con algún kernel  $K(t, p)$  conveniente, en otra ecuación que involucra a  $F(p)$ , más fácil de resolver.

### 10.7.1. El kernel

En [19], Euler considera la ecuación diferencial

$$(Fu^2 + Eu + D)\frac{d^2y}{du^2} + (Cu + B)\frac{dy}{du} + Ay = 0. \quad (40)$$

Propone una solución de la forma

$$y = \int P dx (u + x)^n, \quad (41)$$

y escribe

donde  $P$ , la cual necesitamos definir más adelante, denota alguna función de  $x$ , pero no de  $u$ . Cuando esta función llega a ser conocida, se realiza la integración, al menos por cuadratura, para cada valor de  $u$ , el cual durante la integración se considera una constante. (ver [20]).

Esta es una afirmación muy clara del principio que está detrás del uso de una transformada integral.

Por otra parte en [4] toma

$$y = \int_0^c x^n \sqrt{\frac{u^2 + x^2}{c^2 - x^2}} dx \quad (42)$$

para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{du^2} - \frac{(n+1)}{u} \frac{dy}{du} + \frac{(n+1)y}{c^2 + u^2} = 0, \quad (43)$$

y una generalización

$$y = \int_0^a x^{n-1} (u^2 + x^2)^u (c^2 - x^2)^\nu dx, \quad (44)$$

para resolver una ecuación diferencial más complicada.

La ecuación (42) podría ser considerada como la transformada integral de  $x^n$ , donde el kernel es

$$K(x, u) = \sqrt{\frac{u^2 + x^2}{c^2 - x^2}}.$$

Euler incluye varias otras transformadas integrales, cuyos kernels están relacionados con transformadas modernas. Por ejemplo, en la sección 1036 de [4], encontramos por primera vez  $e^{ux}$  como kernel en la integral

$$u = \int_0^a e^{ux} x^n (a - x)^\nu dx,$$

que satisface la ecuación diferencial

$$u \frac{d^2}{du^2} + (n + \nu + 2 - au) \frac{dy}{du} - (n + 1)ay = 0.$$

Esta forma y otras como ella han sido consideradas versiones preliminares de la transformada de Laplace, la cual llegó a ser común durante los primeros años del siglo veinte. En particular, Euler enfatizó que podría usarse para resolver la que hoy conocemos como ecuación de Laplace

$$(A + \alpha u) \frac{d^2 y}{du^2} + (B + \beta u) \frac{dy}{du} + (C + \gamma u)y = 0.$$

En forma más general el consideró la transformada

$$y = \int_a^b e^{K(u)Q(x)} P(x) dx,$$

cuyas propiedades son discutidas en [22].

También generalizó la transformada (41) a

$$y = \int_a^b P(x) (K(u) + Q(x))^n dx.$$

Todos estos esfuerzos condujeron a explorar el alcance de las técnicas de solución para ecuaciones diferenciales de segundo orden. Euler escribió:

Así mientras aún ahora estamos lejos de una solución del problema, que consiste en encontrar una fórmula que provea la integral de cualquier ecuación diferencial de segundo orden (si la solución de este problema será descubierta alguna vez parece muy incierto), nosotros sin embargo nos aplicaremos a el, así que, al menos en casos especiales, trataremos de basar la averiguación en la forma de la integral sobre la naturaleza de la ecuación dada, y así extender un poco nuestro progreso hacia una solución explícita (traducción de [20]).

### 10.7.2. El kernel de la transformada del wavelet

Como ejemplo del trabajo de Euler relacionado con las transformadas integrales y del kernel, veamos que la imagen de la transformada del wavelet puede ser caracterizada a través de un kernel. En este caso, ésta imagen está dada por

$$Im(L_h(a, b)) = \{F(a, b) | (L_h f)(a, b) = F(a, b) \text{ para alguna } f \in L^2(A)\}$$

Tenemos entonces el siguiente lema

**Lema 10.7.1.** *La imagen de la transformada del wavelet con respecto a una función admisible  $h$  en  $L^2(A)$  es el subespacio de funciones  $F(a, b)$  en  $L^2(G)$  que satisfacen*

$$F(a, b) = \frac{1}{C_h} \int_G F(a_0, b_0) K(a, b; a_0, b_0) d(a_0, b_0)$$

donde

$$K(a, b; a_0, b_0) = \overline{(L_h U(a, b)h)(a_0, b_0)}$$

es el kernel asociado con  $h$ .

*Demostración.* Si  $F$  esta en  $Im(L_h(a, b))$ , entonces existe  $f \in L^2(A)$  tal que

$$(L_h f)(a, b) = F(a, b).$$

Usando ahora (37) con  $g = U(a, b)h$ , vemos que

$$\begin{aligned} F(a, b) &= (L_h f)(a, b) \\ &= \langle f, U(a, b)h \rangle \\ &= \frac{1}{C_h} \langle L_h f, L_h g \rangle \\ &= \frac{1}{C_h} \int_G (L_h f)(a_0, b_0) \overline{(L_h g)(a_0, b_0)} d(a_0, b_0) \end{aligned}$$

Si ahora tomamos

$$K(a, b; a_0, b_0) = \overline{(L_h g)(a_0, b_0)}$$

concluimos entonces que

$$F(a, b) = \frac{1}{C_h} \int_G F(a_0, b_0) K(a, b; a_0, b_0) d(a_0, b_0) \quad (45)$$

Esto muestra que la imagen de  $L_h(a, b)$  esta caracterizada por un kernel asociado con el subespacio de  $L^2(G, \frac{1}{C_h} d(a, b))$ , donde

$$(a, b; a_0, b_0) = \overline{[L_h J_a T_b h]}(a_0, b_0)$$

□

Así que, la imagen de la transformada del wavelet es una transformada integral con el kernel  $K(a, b; a_0, b_0)$ .

## 10.8. Resumen

Euler tuvo una magnífica inventiva y una gran habilidad técnica. Encontramos su nombre en varias ramas del análisis matemático: hay fórmulas de Euler, constantes de Euler, integrales eulerianas y transformadas de Euler.

Los libros escritos por Euler [1], [2], [3], [4] y [5] fueron especialmente sobresalientes porque su presentación y el desarrollo de las ideas se basaron en métodos analíticos. Euler colocó el concepto de función en un papel central dentro del Cálculo, estudió sistemáticamente las funciones trascendentes y su representación mediante series. También utilizó series trigonométricas incluso antes de que lo hiciera el mismo Fourier y es considerado como el originador del concepto de transformada integral.

Como hemos visto, es necesario emplear la fórmula de Euler (18) para definir las transformadas de Fourier, de ventana de Fourier y del wavelet, dadas en (31), (32) y (34), respectivamente. Estas transformadas son métodos de localización tiempo-frecuencia y tienen aplicación, por ejemplo, en análisis de señales. De igual manera, la idea de grupo, también estudiada por Euler ha sido empleada para obtener la fórmula de reconstrucción en el caso de la transformada del wavelet. Finalmente, el trabajo hecho por Euler sobre transformadas integrales, aparece al probar que la imagen de la transformada del wavelet es una transformada integral con kernel.

# Bibliografía

- [1] EULER, L., Introductio in Analysin Infinitorum, vol. 1, *Opera Omnia*, Ser. 1, vol. 8. Leipzig, 1922.
- [2] EULER, L., Institutiones Calculi Differentialis. *Opera Omnia*, Ser. 1, vol. 10. Leipzig, 1913.
- [3] EULER, L., *Institutiones Calculi Integralis. Vol. 1*, St. Petesburg: Imp. Acad. Sci., 1768, Reimpreso como *Op. Omn. I 11*.
- [4] EULER, L., *Institutiones Calculi Integralis. Vol. 2*, St. Petesburg: Imp. Acad. Sci., 1769, Reimpreso como *Op. Omn. I 12*.
- [5] EULER, L., *Institutiones Calculi Integralis. Vol. 1*, St. Petesburg: Imp. Acad. Sci., 1770, Reimpreso como *Op. Omn. I 13*.
- [6] KLINE, M., *El Pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, vol. II. Alianza Editorial, S. A. Madrid, 537-611, 1992.
- [7] EDWARDS, C. H. JR., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag New York, Inc, 1979.
- [8] EULER, L., De summis serierum reciprocarum. *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **7**, 123-134, 1740; *Op. Omn. I 14*, 73-86.
- [9] EULER, L., De seriebus quibusdam considerationes. *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **12**, 53-96, 1750; *Op. Omn. I 14*, 407-462.
- [10] EULER, L., De progressionibus harmonicis observationes. *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **7**, 150-161, 1740; *Op. Omn. I 14*, 87-100.
- [11] EULER, L., Methodus generalis summandi progressionis. *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **6**, 68-97, 1738; *Op. Omn. I 14*, 42-72.
- [12] EULER, L., Methodus universalis series summandi ulterius promota. *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **8**, 147-158, 1741; *Op. Omn. I 14*, 124-137.

- [13] EULER, L., De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **3**, 36-85, 1753; *Op. Omn.* **I 14**, 463-515.
- [14] EULER, L., Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus. *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.* **11**, 114-132, 1798; *Op. Omn.* **I 16**, 333-353. (E704.)
- [15] DAUBECHIES, INGRID, *Ten Lectures on Waveletes* SIAM, 1992.
- [16] EULER, L., *Beiträge Zu Leben und Werk*. Basel-Boston, 1983.
- [17] FRANCI, R., *On the axiomatization of group theory by American mathematician, 1902-1905*, Amphora, 261-277, Basel, 1992.
- [18] GROSSMAN, A. MORLET, J. Y PAUL, T., *Transforms associated to square integrable groups representations, I. General Results*, J. Math. Phys. **26**, 2473-2479, 1985.
- [19] EULER, L., Constructio aequationis differentio-differentialis
- $$Aydu^2 + (B + Cu)du dy + (D + Eu + Fuu)ddy = 0,$$
- sumto elemento du constante . *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **8**, 150-156, 1763; *Op. Omn.* **I 22**, 395-402.
- [20] DEAKIN, M. A. B., Euler's Invention of Integral Transforms. *Arch. Hist. Exact Sci.* **33**, 307-319, 1985.
- [21] NEČAS, J., Integral Transforms (Operational calculus). In *Survey of Applicable Mathematics* (Ed. K. Rectorys)(London:Iliffe), 1125-1136, 1969.
- [22] DEAKIN, M. A. B., Euler's version of the Laplace transform. *Am. Math. Monthly* **87**, 264-269, 1980.



## Capítulo 11

# El papel de Euler en el Análisis Complejo

L.F. Reséndis O.<sup>1</sup> y L. M. Tovar S.<sup>2</sup>

### Resumen

El nacimiento y el inicio del desarrollo sistemático de la variable compleja es sin duda debido al genio creador de Leonard Euler. Se presenta en este capítulo un bosquejo sobre algunas de sus aportaciones fundamentales a esta teoría e investigaciones recientes sobre estos fundamentos los cuales son, aún hoy, completamente vigentes.

### 11.1. Introducción

En la sección 11.1 se presenta una posible génesis del número complejo  $i = \sqrt{-1}$ , que revolucionó no sólo el álgebra sino al propio análisis, dando origen al Análisis Complejo. En la sección 11.2 se incluye la manera en que Euler introduce la función exponencial, la naturalidad con la que surge la constante  $e = 2.7182\dots$  y su célebre fórmula  $e^{i\theta}$ . Todo esto se hace siguiendo las ideas de Euler [1] y estas han sido tomadas de dos fuentes [2], [3] en cuya traducción e interpretación hemos confiado.

---

<sup>1</sup>Área de Análisis Matemático y sus Aplicaciones. Departamento de Ciencias Básicas. UAM-Azcapotzalco, [lfro@correo.azc.uam.mx](mailto:lfro@correo.azc.uam.mx)

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, [tovar@esfm.ipn.mx](mailto:tovar@esfm.ipn.mx) Estancia Sabática 2007, Área de Análisis Matemático, UAM-Azcapotzalco.

Se incluye también una prueba geométrica muy reciente de la irracionalidad de  $e$ . La sección 11.3 aborda el problema de determinar la distribución de ceros en el plano complejo  $\mathbb{C}$  del polinomio  $P_n(z)$  que se obtiene al considerar la  $n$ -ésima suma parcial de la expansión en series de potencias de  $e^z$ . La sección 11.4 es un recuento sucinto de las funciones  $\Gamma$  y  $B$  de Euler con una aplicación al cálculo del volumen de las bolas determinadas por las  $p$ -normas y  $p$ -distancias en  $\mathbb{R}^n$ . Se concluye con la sección 11.5 que da cuenta de las funciones  $p$ -circulares y su estrecha relación con las funciones  $\Gamma$  y  $B$  de Euler. Las secciones 11.1, 11.2 requieren para su lectura una cultura matemática básica mientras que las secciones 11.3, 11.4 y 11.6 requieren un esfuerzo adicional del lector y también presentan resultados originales.

## 11.2. Los números imaginarios

El nacimiento y el inicio del desarrollo sistemático del análisis complejo es sin duda debido al genio creador de Leonard Euler; trataremos de bosquejar una idea sobre lo que pudo ser la génesis de éste en su parte medular: los números imaginarios. Encuentra su motivación primaria en el estudio de raíces de polinomios, un tema de gran interés en los tiempos de Euler. Aún hoy, para nuestros estudiantes de bachillerato la solución de la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  es caso cerrado, más aún, un tanto misterioso, pues a todos nos han mencionado que la solución involucra números imaginarios haciéndonos retroceder hasta las posiciones místicas que envolvieron a estos números por más de dos milenios. Un caso análogo es, incluso para estudiantes de ingeniería de hoy, las soluciones de las ecuaciones  $\cos x = 2$ ,  $x = \ln(-1)$  y una situación similar debió ocurrir en los tiempos de Euler, tan desconcertante como lo sería ahora resolver la ecuación  $e^z = 0$ .

Sin embargo, para el Maestro del cálculo simbólico esto no lo arredró, más aún lo motivó a un estudio más profundo, por lo que primero tuvo que despojarse de la mentalidad reinante de la época, que ya Newton y sus maestros Bernoulli y Goldbach, junto con muchos otros, habían empezado a derruir. Eran bien conocidos en la época de Euler ejemplos como el siguiente:

Determinar la solución de la ecuación  $x^3 - 1 = 0$ . Para ello iniciemos con la factorización

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

donde  $x^2 + x + 1 = 0$  se resuelve por la bien conocida fórmula cuadrática, obteniendo

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Ciertamente  $\sqrt{-3}$  carece de sentido si sólo se consideran números reales, sin embargo seguramente Euler no se detuvo aquí. Sustituyendo el primer valor, por imaginario que sea, en la ecuación y manipulando acorde a las bien conocidas reglas algebraicas se

obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^3 - 1 &= -\frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{-3} + 3(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3) - 1 \\ &= -\frac{1}{8}(1 + 3\sqrt{-3} - 9 - 3\sqrt{-3}) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

lo cual dice que es una solución!! formal de la ecuación propuesta, pues los números imaginarios no se aceptaban como números en los tiempos de Euler. Por supuesto, de igual manera se comprueba que  $x_2$  también se comporta como raíz formal de la ecuación.

Ciertamente, para Euler, la congruencia en la manipulación algebraica fue razón suficiente para continuar este estudio. Ya en 1515 Scipione del Ferro había descubierto un análogo a la fórmula cuadrática para la ecuación reducida de tercer orden, a saber  $x^3 - px - q = 0$ . El mismo Euler en su libro de texto *Elements of Algebra* presenta este resultado de la siguiente forma.

**Teorema 11.2.1.** Una solución para la ecuación reducida  $x^3 = px + q$  está dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \quad (1)$$

La importancia de la forma reducida estriba en el hecho que Cardano probó que la ecuación general de tercer grado  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , mediante un cambio de variable, se transforma en la ecuación reducida de tercer grado. Precisamente con ayuda de esta fórmula resolvamos la ecuación  $x^3 - 3x - 1 = 0$ . Así una solución está dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{27}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}}.$$

Nuevamente al elevar al cubo la solución se tiene al operar algebraicamente

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} + 3 \left( \frac{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 3 \left( \frac{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})} \\ &\quad + \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})(1 - \sqrt{3}\sqrt{-1})} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

que muestra que en efecto es solución de la ecuación en cuestión, al menos formalmente para los tiempos de Euler. Precisamente al caso donde

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$$

se le denominó el caso irreducible de la cúbica. La gráfica de la función  $f(x) = x^3 - 3x - 1$  se muestra en la figura 11.1 y añade un elemento de interés para el matemático

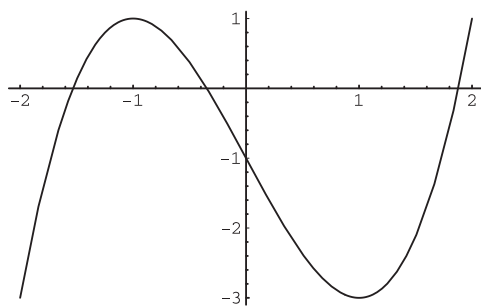


Figura 11.1: La función  $f(x) = x^3 - 3x - 1$

co de hoy, pero paradójico para el estudioso en los tiempos de Euler, ya que muestra que la ecuación tiene incluso tres soluciones reales, a saber  $x_1 = -1.53209\dots$ ,  $x_2 = -.34729\dots$ ,  $x_3 = 1.87939\dots$ . Luego la fórmula expresa tres números reales que pasan no sólo de incógnito en la ecuación original, sino que tienen el capricho de expresarse recurriendo al número imaginario  $\sqrt{-1}$ . Es posible que este tipo de comportamiento haya inclinado a Euler a profundizar más el estudio del ente imaginario  $\sqrt{-1}$  y así en su obra *Elements of Algebra*, Euler describe a  $i = \sqrt{-1}$  como

... neither nothing, nor greater than nothing, nor less than nothing...

es así como  $\mathbb{C}$  llegó a ser, con pleno derecho de origen y crédito a quien se atrevió a introducir a  $i = \sqrt{-1}$  al universo matemático con categoría de número, y quizás sin saberlo o sospecharlo, como una parte necesaria e imprescindible para la evolución futura de la matemática. Decimos lo anterior, pues los matemáticos de eras pasadas expresaban estos números imaginarios al intentar resolver ecuaciones algebraicas, pero los desdaban como una aberración o error en la armonía de la naturaleza, como ya en su tiempo lo había sido  $\sqrt{2}$  o aún lo eran los números falsos, conocidos hoy como números negativos. Dado que Euler ya tenía conocimiento del cálculo es posible conjeturar un estudio minucioso de la función  $f(x) = x^3 - px - q$  y si suponemos que su gráfica es como en la figura 11.1, debe tener un máximo y un mínimo local en  $\pm\sqrt{\frac{p}{3}}$  respectivamente. Para que existan entonces tres raíces reales, se requiere que el

máximo y el mínimo tengan signos opuestos y esto se da si y sólo si

$$0 > f(-\sqrt{\frac{p}{3}})f(\sqrt{\frac{p}{3}}) = 4 \left( \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right) .$$

De aquí resulta uno de los teoremas más paradójicos que ha enfrentado el espíritu matemático en su historia.

**Teorema 11.2.2.** *La ecuación cúbica  $x^3 - px - q = 0$ , para  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p \neq 0$  tiene tres raíces reales distintas si y sólo si*

$$\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0 .$$

En consecuencia la fórmula **1** válida desde el formalismo y la ambigüedad de la época de Euler, por cierto completamente explicable, hace inminente y necesaria la irrupción de los números imaginarios dentro del edificio matemático y es Euler quien decide de una vez por todas hacer de lado la mística filosófica generada e introducida por Platón y la escuela Pitagórica en la matemática, removiendo la asepsia que prevalecía sobre las entidades numéricas. Se puede incluso decir que hizo patente el camino de secularización de la matemática, que ya otros habían iniciado.

Finalmente la historia para el cálculo de las raíces de la ecuación se concluye satisfactoriamente cuando Euler combina sus resultados con los de DeMoivre en su artículo *Recherches sur les racines imaginaires des équations* de 1749, y es ahí donde aparece la bien conocida fórmula para calcular las raíces de un número complejo, donde él hace la peculiar observación de que las raíces de un número complejo son nuevamente complejas.

Precisamente aplicando esta fórmula para calcular las raíces cúbicas que aparecen en la solución de  $x^3 - 3x - 1 = 0$  se obtiene:  $x_1 = 2 \cos \frac{7\pi}{9} = -1.53209 \dots$ ,  $x_2 = 2 \cos \frac{13\pi}{9} = -.34729 \dots$ ,  $x_3 = 2 \cos \frac{\pi}{9} = 1.87939 \dots$

### 11.3. La función exponencial

Ciertamente Euler no se detuvo con la introducción de los números complejos, era necesario ver su relación con otras entidades ya conocidas, como las funciones en nuestro lenguaje actual. A continuación se da un esbozo del descubrimiento de Euler de la función por excelencia en la variable real y compleja: la función exponencial.

Al hojear cualquier libro de variable compleja invariablemente son ejemplos de funciones analíticas los polinomios y las funciones racionales en su dominio y de estas últimas son de particular interés las transformaciones de Möbius. Sin embargo es precisamente la función exponencial la que permite estudiar otro tipo de funciones donde se incluyen las funciones trigonométricas, logarítmicas y la función Gama, por citar algunas, amén de los ejemplos y contraejemplos que proveen estas funciones. Está por

demás mencionar la posición prominente de la función exponencial en casi todas las ramas de la matemática.

En el capítulo VII de su obra *Introductio* se obtiene el desarrollo en serie de la función exponencial  $y = a^x$ ,  $1 < a$ . Describimos aquí la forma en que procede Euler, sin prestar atención al rigorismo de nuestros días.

Se considera  $\omega$  un número infinitamente pequeño tal que  $a^\omega = 1 + \psi$ , donde  $\psi$  también es infinitamente pequeño. Estas dos cantidades infinitamente pequeñas las relaciona por una constante  $\psi = k\omega$ , de donde  $a^\omega = 1 + k\omega$ . Para clarificar el que se trata de una constante Euler presenta ejemplos similares a los siguientes: para  $a = 7$  se tiene,  $7^{.000001} = 1 + k(.000001)$  y se sigue que  $k = 1.9459$ . Para  $a = 11$ , se tiene,  $11^{.000001} = 1 + k(.000001)$  y se sigue que  $k = 2.3979$  concluyendo que el número  $k$  depende de la base. Por supuesto, ahora sabemos que  $k = \ln 7$  y  $k = \ln 11$  respectivamente.

Volviendo a Euler, se considera el cambio  $j = x/\omega$  y usando la serie binomial generalizada de Newton se tiene

$$\begin{aligned} a^x &= (a^\omega)^{\frac{x}{\omega}} = (1 + k\omega)^j \\ \left(1 + \frac{kx}{j}\right)^j &= 1 + j\left(\frac{kx}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{kx}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{kx}{j}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + kx + \frac{j-1}{j} \cdot \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{(j-1)(j-2)}{j \cdot j} \cdot \frac{k^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Como  $x$  es finito y  $\omega$  es infinitamente pequeño entonces  $j = x/\omega$  es infinitamente grande y siguiendo a Euler

$$\frac{j-1}{j} = 1, \quad \frac{(j-1)(j-2)}{j \cdot j} = 1, \dots,$$

y por tanto

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

y en particular

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Es de suponer que para Euler una elección obligada y natural para el número  $k$  fuera  $k = 1$ , luego

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

número que Euler denotó para la posteridad por  $e$  y cuyo valor es aproximadamente

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967 \dots$$

Después de esto la función exponencial llegó a ser

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Recientemente J. Sondow [4] ha dado una demostración geométrica de la irracionalidad de  $e$  la cual es consecuencia de la propiedad de intervalos encajados:

**Teorema 11.3.1.** *El número  $e$  es irracional.*

*Demostración.* Se considerará una sucesión anidada de intervalos  $\{I_n\}$ . Definase  $I_1 = [2, 3]$  y se procede inductivamente de la siguiente manera. Para  $n \geq 2$ , se divide al intervalo  $I_{n-1}$  en  $n$  subintervalos iguales y al segundo de estos subintervalos se le escoge como  $I_n$ . Así por ejemplo  $I_2 = [\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}]$ ,  $I_3 = [\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}]$ . Resulta que  $I_n = [\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}, \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{n!}]$ . Si dividimos ahora en  $n+1$  partes iguales de longitud  $\frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)!}$ , resulta entonces que el segundo subintervalo es

$$I_{n+1} = \left[ \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!}, \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{2}{(n+1)!} \right] = \left[ \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!}, \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} + \frac{1}{(n+1)!} \right]$$

de donde obtenemos que la intersección

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}, \quad (2)$$

que es el equivalente geométrico a

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Cuando  $n > 1$  el intervalo  $I_{n+1}$  está estrictamente contenido en  $I_n = [\frac{a}{n!}, \frac{a+1}{n!}]$  para algún  $a = a(n) \in \mathbb{N}$  y por la relación 2, el número  $e$  no puede ser igual a ninguna fracción con denominador  $n!$ . Ya que cualquier número racional  $\frac{p}{q}$  puede ser escrito como  $\frac{p(q-1)!}{q!}$ , concluimos que  $e$  es un número irracional.  $\square$

Siguiendo la operatividad de Euler, escribimos dos de las varias pruebas que él da del siguiente teorema, donde se dan por conocidas las expansiones en series de las funciones  $\cos x$  y  $\sin x$  y el siguiente argumento muestra la impresionante confianza de Euler en el poder de los símbolos.

**Teorema 11.3.2.** *Para cualquier número real  $x$  se cumple que  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .*

*Demostración.* Euler no tiene prejuicios en sustituir en la expansión de la exponencial a  $x$  por  $ix$  y realizar los cálculos pertinentes, ahora completamente justificados.

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(ix)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(ix)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(ix)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \\
 &= 1 + ix - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{ix^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{ix^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \\
 &= \left( 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots \right) \\
 &\quad + i \left( x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots \right) \\
 &= \cos x + i \sin x .
 \end{aligned}$$

El segundo argumento hace uso de la integración. Sea  $y = \sin x$ , luego

$$x = \arcsen y = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} .$$

Sin ruborizarnos se toma el cambio de variable  $y = iz$ ,  $dy = i dz$  y entonces

$$x = \int \frac{i dz}{\sqrt{1-(iz)^2}} = i \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = i \ln(z + \sqrt{1+z^2}) .$$

Retornando a la variable  $x$  se tiene

$$x = i \ln \left( \sqrt{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x}{i} \right) = i \ln(\cos x - i \sin x) .$$

De aquí

$$ix = i^2 \ln(\cos x - i \sin x) = \ln \frac{1}{\cos x - i \sin x} = \ln(\cos x + i \sin x)$$

y se concluye exponenciando. □

Por supuesto, del teorema anterior se obtiene la célebre igualdad

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que involucra a las cinco constantes más importantes de la matemática.

## 11.4. La $n$ -ésima suma parcial de la exponencial

Lo presentado en esta sección y en la siguiente tiene por objeto mostrar que la función exponencial se mantiene tan vigente como al inicio de su descubrimiento por



Euler, aunque difícilmente él hubiera llegado a sospechar la enorme riqueza que  $e^z$  introdujo en las matemáticas, en particular al análisis real y complejo.

Consideremos el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial  $e^z$ , con centro en 0, es decir

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

con  $z = x + iy$ . Como  $e^z$  es una función entera, este desarrollo converge para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Es bien sabido que si  $w \neq 0$ , la ecuación  $e^z = w$  tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$x = \ln |w|, \quad y_k = \arg w + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

así todas las preimágenes de  $w$  bajo  $e^z$  son puntos que se encuentran en una recta vertical de abscisa  $x = \ln |w|$ , distanciados entre sí por múltiplos de  $2\pi$ .

Podemos reescribir el teorema Fundamental del Álgebra en términos funcionales de la siguiente forma:

La familia de los polinomios de grado mayor o igual a 1 son funciones de  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{C}$ .

Dado que los polinomios son una subfamilia de las funciones enteras, la pregunta natural sería si el teorema fundamental del álgebra se puede extender a todas las funciones enteras no constantes y la respuesta la da el teorema pequeño de Picard, que dice que casi se puede extender a toda función entera, más precisamente:

**Teorema 11.4.1.** *Toda función entera no constante evita a lo más un punto de  $\mathbb{C}$  en su imagen.*

El ejemplo clásico de optimalidad de este resultado nos lo brinda precisamente  $e^z$ , que evita solamente al cero. De hecho, para  $w \neq 0$  la ecuación  $e^z = w$  admite una infinidad de soluciones mientras que  $e^z = 0$  no tiene soluciones.

Esto es más singular si consideramos para cada  $n \in \mathbb{N}$  la  $n$ -ésima suma parcial de  $e^z$ , es decir

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!}.$$

Es claro que  $P_n(z)$  tiene  $n$  ceros sin embargo en el límite, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $e^z$  !No tiene ceros! Nos podemos entonces preguntar ¿qué sucedió con los ceros de  $e^z$ ?

Consideremos la ecuación  $T_n(z) = P_n(z) - w$ . Se observa que  $T_{n-1}(z) = T'_n(z) - w$ , así los ceros de  $T_{n-1}(z)$  son las preimágenes de  $w$  bajo  $T'_n(z)$  y esto es válido inclusive para el caso  $w = 0$ . Considerando a  $e^z$  como un polinomio de grado infinito y resolviendo la ecuación  $e^z = 100 + 100i$  tenemos que el conjunto infinito de soluciones es

$$z_k = \ln 100\sqrt{2} + i \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

y si se consideran, por ejemplo, los ceros de los polinomios aproximantes de  $e^z = 100 + i100$ , es decir los ceros de

$$Q_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} - 100 - 100i = 0$$

presentan la siguiente distribución que ilustra la figura 11.2 donde una subsucesión

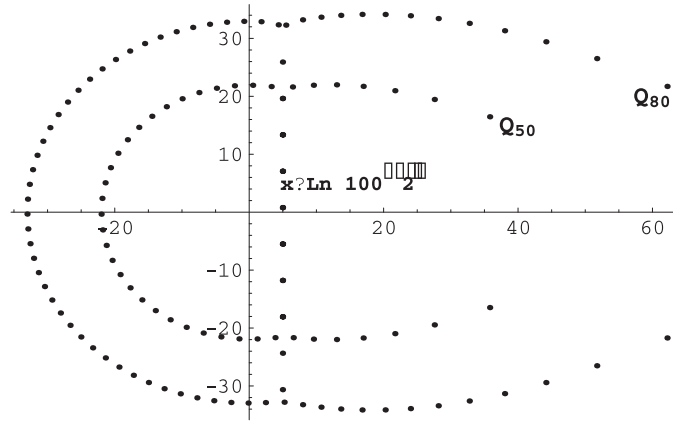


Figura 11.2: Los ceros de  $Q_{50}(z)$  y  $Q_{80}(z)$

de estos ceros converge a la solución de  $e^z = 100 + i100$ , y son precisamente los ubicados en la recta vertical  $x = \ln 100\sqrt{2}$ . El resto de los ceros escapa a infinito. Este fenómeno se puede entender al estudiar para cada  $n \in \mathbb{N}$ , los ceros de  $P_n(z)$ , los cuales forman un conjunto de  $n$ -ceros (contados con multiplicidades), pero necesariamente conforme  $n$  tiende a infinito el número de ceros tenderá a infinito al igual que el módulo de éstos pues, por el teorema de unicidad de funciones analíticas, los ceros de  $P_n(z)$  deben fugarse a infinito, dado que  $e^z$  no tiene ceros. A continuación estudiamos algunos hechos que nos permiten entender un poco la

distribución de ceros del polinomio  $P_n(z)$ . La referencia básica es [5].

**Proposición 11.4.2.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  todos los ceros de  $P_n(z)$  son simples, es decir de orden 1.*

*Demostración.* Se observa primero que  $P_{n-1}(z) = P'_n(z)$ . Ahora si  $v$  fuera un cero de orden mayor a 1, tendría que anular a la derivada, así

$$0 = P_n(v) - P_{n-1}(v) = \frac{v^n}{n!}$$

lo cual implica que  $v = 0$  es un cero de  $P_n(z)$  lo cual es una contradicción pues  $P_n(0) = 1$ .  $\square$

Es inmediato notar que como los coeficientes de  $P_n(z)$  son todos números reales si  $v \in \mathbb{C}$  es un cero no real de  $P_n(z)$  entonces también lo es  $\bar{v}$ , es decir los ceros no reales aparecen en pares conjugados, lo cual explica la simetría de la distribución de ceros con respecto al eje real en la figura 11.2.

**Proposición 11.4.3.** *Si  $n$  es impar, entonces  $P_n(z)$  tiene solamente un cero real  $v_n$  que cumple la condición*

$$-n \leq v_n \leq -1.$$

*Si  $n$  es par, entonces  $P_n(z)$  no tiene ceros reales.*

*Demostración.* En general, como los coeficientes de  $P_n(z)$  son reales positivos sus ceros reales, de existir, deben ser negativos. Sea  $n \in \mathbb{N}$  impar, por el teorema del valor intermedio,  $P_n(z)$  tiene al menos un cero en  $\mathbb{R}$ . Ahora si  $v$  es cualquiera de ellos

$$P'_n(v) = P_n(v) - \frac{v^n}{n!} = -\frac{v^n}{n!} > 0. \quad (4)$$

Así  $P_n(z)$  es localmente creciente cuando pasa por todo cero real. Si  $v < v'$  fueran dos ceros reales consecutivos de  $P_n(z)$  entonces por continuidad  $P_n(z)$  es positivo a la derecha de  $v$  y negativo a la izquierda de  $v'$  lo cual es una contradicción. Ahora reescribiendo

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} \left(1 + \frac{z}{3}\right) + \frac{z^4}{4!} \left(1 + \frac{z}{5}\right) + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{z}{n}\right)$$

se obtiene para  $n \geq 3$  que  $P_n(-1) > 0$  y  $P_n(-n) < 0$  lo que implica que el único cero real está en  $(-n, -1)$ .

Ahora si  $n \in \mathbb{N}$  es par entonces  $P_n(z)$  deberá ser positivo para valores reales con módulo suficientemente grande. Si  $P_n(z)$  tiene una raíz real, necesariamente negativa, por lo anterior y por 4 debe existir al menos otro cero, y por el razonamiento del caso anterior llegamos a una contradicción.  $\square$

Para  $n \in \mathbb{N}$  impar, sea  $v_n$  el único cero real de  $P_n(z)$ . Usando el programa Mathematica se tiene por ejemplo:  $v_1 = -1$ ,  $v_3 = -1.59607\dots$ ,  $v_5 = -2.18061\dots$ ,  $v_7 = -2.759\dots$ ,  $\dots$ ,  $v_{51} = -15.1788\dots$ . En general se tiene

**Teorema 11.4.4.** *La sucesión de ceros reales  $\{v_n\}$  de  $P_n(z)$ , para  $n \in \mathbb{N}$  impar es decreciente con  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$ .*

*Demostración.* Para  $n \geq 3$  se tiene por el Teorema 11.4.3

$$\begin{aligned} P_n(v_{n-2}) &= P_{n-2}(v_{n-2}) + \frac{v_{n-2}^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{v_{n-2}^n}{n!} = \\ &= + \frac{v_{n-2}^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{v_{n-2}}{n}\right) > 0. \end{aligned}$$

Si  $v_{n-2} < v_n$  entonces  $P_n(z)$  es decreciente a la izquierda de  $v_n$  lo cual es una contradicción con **4**, por tanto  $v_n < v_{n-2}$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \in (-\infty, 0)$  entonces como  $P_n(z)$  converge uniformemente a  $e^z$  en  $|z - v| \leq 1$  se tendría por el teorema de Hurwitz que  $e^v = 0$  lo cual es claramente una contradicción.  $\square$

El siguiente teorema debido a Poyla y Szegő [6] da el comportamiento asintótico de la sucesión de ceros.

**Teorema 11.4.5.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  un número impar y  $v_n$  el único cero real de  $P_n(z)$ . Entonces

$$-v_n = \eta n + \alpha \ln \alpha + \beta + o(1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

donde  $\eta = 0.278464 \dots$  denota el único cero real de la ecuación trascendental  $\eta e^{1+\eta} = 1$ ,

$$\alpha = \frac{\eta}{2(1+\eta)} = 0.108906 \dots \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\eta}{1+\eta} \ln \left( \sqrt{2\pi} \frac{1+\eta}{\eta} \right) = 0.532127 \dots$$

En particular el teorema anterior dice nuevamente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - v_{n-2}) = 2\eta$ . Con objeto de ilustrar la situación geométrica de los ceros de  $P_n(z)$  consideremos las gráficas de los ceros de  $P_{10}(z)$ ,  $P_{20}(z)$  y  $P_{39}(z)$  que aparecen en la figura 11.3. Para una descripción más detallada de la gráfica de los

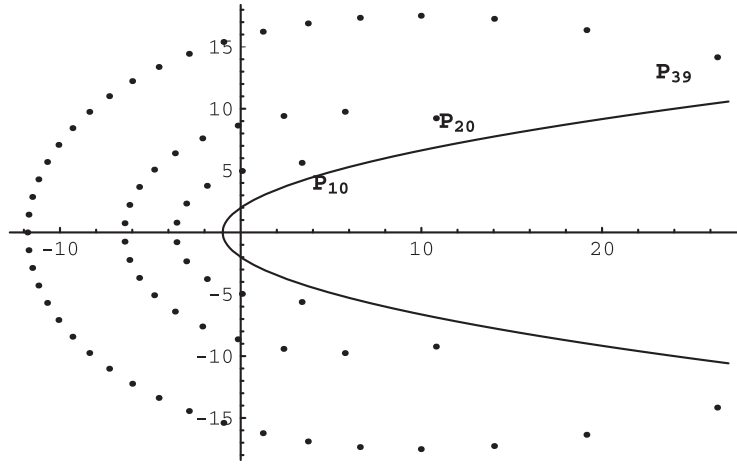


Figura 11.3: Los ceros de  $P_{10}(z)$ ,  $P_{20}(z)$  y  $P_{39}(z)$

ceros de  $P_n(z)$ , con  $1 \leq n \leq 47$  ver [7].

Como lo ilustra la figura, los conjuntos de ceros de los polinomios  $P_n(z)$  aparecen siguiendo una configuración parecida a una herradura, que se va abriendo al aumentar

el grado del polinomio. Una primera explicación de la forma en que los ceros de los polinomios  $P_n(z)$  se fugan a infinito está dada por un resultado deakeya [8].

**Teorema 11.4.6.** *Si todos los coeficientes del polinomio  $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$  son positivos, entonces todos los ceros del polinomio pertenecen al anillo  $\alpha \leq |z| \leq \beta$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son el mínimo y el máximo del conjunto*

$$\left\{ \frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n} \right\}$$

respectivamente

Aplicado a nuestro caso particular los ceros de  $P_n(z)$  están precisamente dentro del anillo  $1 \leq |z| \leq n$ . El teorema de Hurwitz permite refinar existencialmente este resultado.

**Teorema 11.4.7.** *Sea  $0 < R < \infty$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que los ceros de  $P_n(z)$  pertenecen al anillo  $R \leq |z| \leq n$  para cada  $n \geq N$ .*

El trabajo de Saff y Varga [9] da un decisivo adelanto sobre el comportamiento de los ceros de  $P_n(z)$  como lo ilustra el siguiente teorema.

**Teorema 11.4.8.** *La región parabólica*

$$\{ (x, y) : y^2 \leq 4(x+1) \}$$

*está libre de ceros de  $P_n(z)$ .*

La región mencionada en el teorema de Saff y Varga se ha dibujado en la figura 11.3.

Otra parte de este comportamiento lo explica el teorema de Gauss-Lucas ([10] p.22), que es una generalización del teorema de Rolle para polinomios. Antes de dar el enunciado de este teorema recordamos que la cerradura convexa de un conjunto es el mínimo conjunto convexo cerrado que contiene al conjunto en el sentido de la inclusión.

**Teorema 11.4.9.** *Para cualquier polinomio  $p(z)$  los ceros de su derivada  $p'(z)$  están contenidos en la cerradura convexa del conjunto de ceros de  $p(z)$ .*

*Demostración.* Sea  $p(z) = A(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ . Entonces

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k}.$$

Si  $p'(z_0) = 0$ , entonces  $z_0$  es una combinación lineal de las raíces  $z_k$ , ya que

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_0 - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{z_0 - z_k}{|z_0 - z_k|^2}$$

de donde

$$z_0 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_0 - z_k|^2}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{|z_0 - z_k|^2}}$$

ha quedado expresado como combinación lineal convexa.  $\square$

Para caracterizaciones relacionadas con convexidad sugerimos ver por ejemplo [11].

**Teorema 11.4.10.** Sean  $\{\alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,n}\}$  los  $n$  ceros de  $P_n(z) = 0$  y

$$\beta_n = \sup\{\operatorname{Im} \alpha_{n,1}, \dots, \operatorname{Im} \alpha_{n,n}\}$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty$ .

*Demostración.* Supóngase que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = l < \infty$ . Por el teorema de Saff-Varga, para toda  $n \in \mathbb{N}$ , la parte real de cualquier cero de  $P_n(z)$  cumpliría

$$\operatorname{Re} \alpha_{n,j} \leq \frac{l^2 - 4}{4}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Debido a la igualdad  $P'_n(z) = P_{n-1}(z)$ , el teorema de Gauss-Lucas dice que los ceros de  $P_{n-1}(z)$  están contenidos en la cerradura convexa de los ceros de  $P_n(z)$ . Dado que todo convexo debe contener todos los segmentos de recta que unen cualesquiera de sus puntos, algunos de los ceros de  $P_n(z)$  son vértices de la cerradura convexa (polígono convexo) de los ceros de  $P_n(z)$ . Por tanto la familia de las cerraduras convexas de los ceros de  $P_n(z)$  es una unión anidada de conjuntos convexas, con diámetro tendiendo a infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ , esto por el teorema 11.4.4. Este convexo estaría contenido en la semifrancia limitada por  $y = \pm \frac{l^2 - 4}{4}$  y  $x = l$  y habría una infinidad de ceros de polinomios  $P_n(z)$  convergiendo a los vértices finitos de la franja lo cual implicaría por el teorema de Hurwitz una contradicción, pues  $e^z \neq 0$ .  $\square$

Hasta donde sabemos, la evidencia gráfica de que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \infty$  donde

$$\eta_n = \sup\{\operatorname{Re} \alpha_{n,1}, \dots, \operatorname{Re} \alpha_{n,n}\}$$

no está probada, más aún la misma evidencia gráfica sugiere que las partes imaginarias de los ceros de  $P_n(z)$  son crecientes hasta alcanzar su máximo y después son decrecientes y que cada cero es vértice de la cerradura convexa de los ceros de  $P_n(z)$ . Supongamos válido que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \infty$ , entonces el teorema de Gauss-Lucas, en el argumento de la demostración anterior, describe la saturación de  $\mathbb{C}$  por la cerraduras convexas de los ceros de  $P_n(z)$ . Denotamos esta cerradura por  $\widehat{P_n(z)}$ .

**Teorema 11.4.11.** Supóngase que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \infty$  y sea  $P_n(z)$  la  $n$ -ésima suma parcial de la exponencial. Entonces

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \widehat{P_n(z)}.$$

*Demostración.* Si la unión anidada de las cerraduras convexas  $\widehat{P_n(z)}$  fuera distinta de  $\mathbb{C}$ , se elige un punto  $z_0$  en la frontera de  $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} \widehat{P_n(z)}$ . Por convexidad existe una recta que pasa por  $z_0$  de tal forma que el conjunto  $A$  está en sólo uno de los semiplanos determinados por la recta. Si la suposición es válida la recta no puede ser vertical y por el teorema anterior la recta tampoco es horizontal. Si la recta tiene pendiente positiva o negativa se obtiene una contradicción combinando la suposición con el teorema 11.4.4. Así la unión mencionada es todo  $\mathbb{C}$ .  $\square$

La evidencia gráfica sugiere que la saturación de  $\mathbb{C}$  por las cerraduras convexas  $\widehat{P_n(z)}$  se realiza en forma de herraduras.

A continuación ponemos a consideración del lector variantes del problema sobre la distribución de ceros aquí mostrado. El primero es considerar la función  $e^{z^2}$  cuya distribución de ceros aparece en la figura 11.4 y el segundo es la función  $e^{z^5}$  cuya distribución de ceros aparece en la figura 11.5. Creemos que las figuras motivan conjeturas acerca de la distribución de ceros y son motivo suficiente para estudiar más cuidadosamente las distribuciones de ceros asociadas a sumas parciales que involucran a la exponencial.

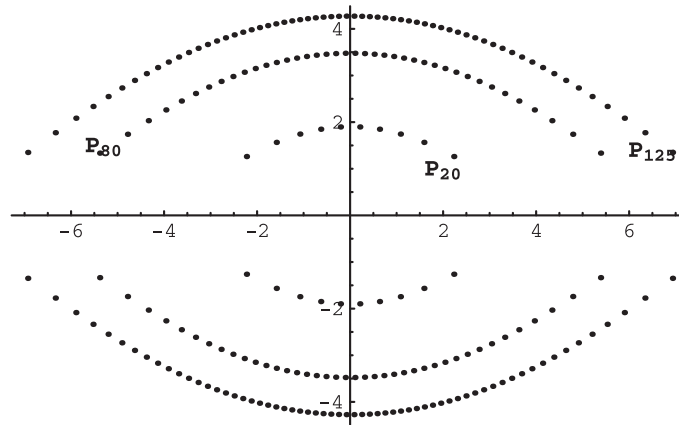


Figura 11.4: Los ceros de  $P_{20}(z)$ ,  $P_{80}(z)$  y  $P_{120}(z)$  para  $e^{z^2}$ .

Sobre generalizaciones de la función exponencial está el considerar  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un operador lineal y definir

$$e^A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

y todas sus aplicaciones en la Teoría de ecuaciones diferenciales, ver por ejemplo [12]. Otras generalizaciones de la función  $e^z$ , en dimensiones mayores se dan en el análisis de Clifford y pueden ser consultadas en [13], pero cabe destacar que ambas generalizaciones tienen limitantes, por lo que resulta en general un problema vigente el

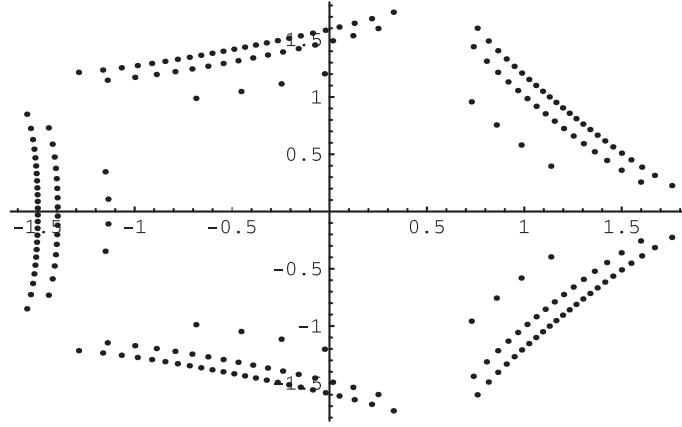


Figura 11.5: Los ceros de  $P_{20}(z)$ ,  $P_{80}(z)$  y  $P_{125}(z)$  para  $e^{z^5}$ .

encontrar generalizaciones de la exponencial en estructuras que extiendan a  $\mathbb{C}$  y a las funciones analíticas.

## 11.5. La función gama

En el año de 1729 Euler introdujo la función Gama con la idea de obtener una generalización del factorial de  $n$  para números distintos a los naturales. Este problema de interpolación había superado los esfuerzos de C. Goldbach (1690-1764), Daniel Bernoulli (1700-1784) e incluso J. Stirling (1692-1770) y finalmente el problema requirió del ingenio de Euler. La solución a este problema proyectó a Euler a la escena matemática del momento. Debido a la definición del factorial  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  y a la respuesta que propuso, él pudo, como sugiere P. J Davis [3], haber experimentado con productos de diversa índole, notando por ejemplo que si  $n \in \mathbb{N}$

$$\left[ \left( \frac{2}{1} \right)^n \frac{1}{n+1} \right] \left[ \left( \frac{3}{2} \right)^n \frac{2}{n+2} \right] \left[ \left( \frac{4}{3} \right)^n \frac{3}{n+3} \right] \cdots = n!$$

donde se deja de lado la pregunta sobre la convergencia del producto y se verifica por cancelación. Acorde con R. Remmert [14] la forma en que Euler presenta su solución es reescribiendo la expresión anterior como

$$\Gamma(z+1) = \frac{1 \cdot 2^z}{1+z} \cdot \frac{2^{1-z} \cdot 3^z}{2+z} \cdot \frac{3^{1-z} \cdot 4^z}{3+z} \cdots = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\nu} \right)^z \left( 1 + \frac{z}{\nu} \right)^{-1} \quad (5)$$



para  $z \neq -1, -2, \dots$ . Tomando en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{x-1}(x+n)}{(n+1)^x} = 1$$

y truncando la fórmula de Euler se obtiene la fórmula de Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}.$$

De esta fórmula es inmediata la ecuación funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (6)$$

Es A. M. Legendre [[15], vol. 1, p.221] quien da el nombre a la

función Gama y C.F. Gauss en 1811 quien extiende a valores complejos a la función Gama. La expresión integral de la función Gama la obtiene Euler, (ver [3], pag. 170-172) sin embargo es un fácil ejercicio de inducción probar el resultado de Euler:

$$\int_0^1 (-\ln t)^n dt = n!.$$

Con el cambio de variable  $u = -\ln t$  se obtiene

$$n! = \int_0^1 (-\ln t)^n dt = \int_0^\infty u^n e^{-u} du$$

y de esta representación es fácil verificar la convergencia de la integral. Luego una manera de tener una generalización del factorial para valores distintos de  $n \in \mathbb{N}$  es sustituir  $n$  por la variable  $z$  y así se obtiene

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Cabe mencionar que J. B. Conway [17], presenta en su libro (p.182-184.) una demostración rigurosa del método empleado por Euler para probar la representación integral de la función Gama. En este mismo libro, Conway presenta la caracterización de la función Gama usando la ecuación funcional **6** bajo las condiciones de Bohr-Mollerup.

**Teorema 11.5.1.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  que satisfice

- La función  $\log f(x)$  es convexa;
- $f(x+1) = xf(x)$  para cada  $x \in (0, \infty)$ ;
- $f(1) = 1$ .

Entonces  $f(x) = \Gamma(x)$  par todo  $x \in (0, \infty)$ .

Menos conocida es la caracterización dada por H. Wielandt (ver [14], pag. 43).

**Teorema 11.5.2.** Sea  $F$  una función holomorfa en el semiplano derecho  $H = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z\}$ . Suponga que se verifican:

- $F(z+1) = zF(z)$ ;
- $F(z)$  es acotada en la franja  $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$ .

Entonces  $F = a\Gamma$  en  $H$  donde  $a = F(1)$ .

Hay también una caracterización por una ecuación diferencial no lineal, recurriendo a la función Polygama de orden 1 (ver [18], p.100) y que se motiva al derivar dos veces  $\ln \Gamma(z)$  en la representación de  $\Gamma$  dada por la fórmula 5.

Sea  $\gamma$  la constante de Euler <sup>3</sup>

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

**Teorema 11.5.3.** Considere en el semiplano  $H$  la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2}{dz^2}(\ln f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}$$

con condiciones iniciales  $f(1) = 1$  y  $f'(1) = -\gamma$ . Entonces existe una única solución  $f(z)$  de la ecuación y coincide con  $\Gamma(z)$  en  $H$ .

Esta caracterización la prueba Srinivasan [19] por medio del teorema de Wieland. Aquí se presenta la prueba usando el teorema de Bohr-Mollerup pero siguiendo lo hecho por Srinivasan.

*Demostración del Teorema 11.5.3* Primero se afirma que si  $f(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$  es una solución de

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \quad (7)$$

entonces  $h(x) = \frac{f(x+1)}{x}$  es también solución. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(\ln h(x)) &= \frac{d^2}{dx^2}(\ln \frac{f(x+1)}{x}) = \frac{d^2}{dx^2}(\ln f(x+1) - \ln x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x+1)^2} + \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>La racionalidad o irracionalidad de  $\gamma$  es aún un problema abierto.

Se construye la solución integrando la ecuación 7 de 1 a  $x$  y considerando la condición inicial para obtener

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{f(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{dt}{(n+t)^2}$$

es decir

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right).$$

La serie anterior es comparable con  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  en compactos de  $(0, \infty)$  por tanto una solución explícita de la ecuación 7 se obtiene al integrar nuevamente de 1 a  $x$

$$\begin{aligned} \log f(x) - \log f(1) &= - \int_1^x \gamma dt + \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t} \right) dt \\ &= \gamma(1-x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x-1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+x) \right). \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\ln \frac{n+1}{n+x} = \ln \left( 1 + \frac{1-x}{n+x} \right) = \frac{1-x}{n+x} - \frac{(1-x)^2}{2(n+x)^2} + \dots$$

y por tanto la serie que expresa a  $\ln f(x)$  es uniformemente convergente por compactos de  $(0, \infty)$  y por la definición de la constante  $\gamma$

$$\log f(2) = -\gamma + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \right) = 0.$$

Es decir  $f(2) = 1$  y  $f'(2) = 1 - \gamma$ . Se calculan ahora las condiciones iniciales para  $h(x)$  y se tiene  $h(1) = f(2) = 1$  y  $h'(1) = f'(2) - f(2) = -\gamma$ . Por la unicidad de la solución se tiene  $h(x) \equiv f(x)$  y por tanto se verifica la ecuación funcional  $f(x+1) = xf(x)$ .

Por ser solución de la ecuación diferencial se tiene que  $\ln f(x)$  es convexa. Para poder concluir usando el teorema de Bohr-Mollerup se observa que

$$f(x) = \exp \left( - \int_1^x \gamma dt + \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t} \right) dt \right)$$

y por tanto  $f(x)$  es positiva. □

Una función estrechamente relacionada con la función Gama es la función Beta. A continuación se define esta función. Se considera la representación integral de la función Gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-x} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

y se reescribe usando el cambio de variable  $t = u^2$  para obtener

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \quad x > 0 .$$

Se calcula ahora el producto

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1} du \cdot 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-1} dv \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1} du dv \end{aligned}$$

y por el cambio de variables  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  se tiene

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\Gamma(x+y) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta .$$

Nuevamente se hace un cambio de variable  $t = \cos^2 \theta$  para reescribir este producto como

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y) \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

y de aquí se define  $B$ , llamada la función Beta de Euler como

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

la cual es también conocida como la integral euleriana de primera especie. Por supuesto la expresión integral para la función Beta tiene sentido para  $(z, w) \in H \times H$  y la integral impropia que la define converge compacta y absolutamente en su dominio.

Como una aplicación de directa de la utilidad de la función Gama se calcula el volumen de las  $p$ -bolas en  $\mathbb{R}^n$ . Es bien conocido que  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_p)$  con

$$|x|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

es un espacio vectorial normado para  $p \geq 1$ . El caso  $0 < p < 1$  lo abordamos desde un aspecto más general.

Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado y para  $0 < p < 1$  defínase para cada  $x, y \in E$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|^p . \quad (8)$$

**Teorema 11.5.4.** Sea  $0 < p < 1$ . Entonces la función  $\rho$  es una función distancia en  $E$ .

*Demostración* Es suficiente probar la desigualdad del triángulo. Sea  $0 < p < 1$  y la función  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(t) = 1 + t^p - (1 + t)^p$ . Entonces  $h'(t) = p(t^{p-1} - (1 + t)^{p-1}) > 0$ . Como  $h'(t) \neq 0$  y  $\lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = \infty$  entonces  $0 \leq h(t)$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Por tanto  $(1 + t)^p \leq 1 + t^p$ . Para cada  $0 \leq a, 0 < b$  la desigualdad implica  $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ . Como la función  $t \mapsto t^p$  es creciente para  $t > 0$  entonces

$$\|x - y\|^p \leq (\|x - z\| + \|z - y\|)^p \leq \|x - z\|^p + \|z - y\|^p,$$

por 8 esto dice  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ .  $\square$

**Corolario 11.5.5.** Sean  $0 < p < 1$  y  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p.$$

Entonces  $d$  es una función distancia.

*Demostración* La desigualdad del triángulo es consecuencia del teorema 11.5.4 y de que el valor absoluto es una norma en  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Las  $p$ -bolas en  $\mathbb{R}^n$  se refieren entonces a la  $p$ -distancia si  $0 < p < 1$  o a la  $p$ -norma si  $1 \leq p$ . El volumen de las  $p$ -bolas para  $p = 1, 2$  se obtuvo en [20].

**Teorema 11.5.6.** Sean  $0 \leq p < \infty$  y  $0 < R < \infty$ . El volumen del conjunto

$$B_p(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_p \leq R\}$$

es igual a

$$V(B_p(0, R)) = \frac{2^n R^n}{np^{n-1}} \frac{\Gamma^n(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{n}{p})} \quad (9)$$

*Demostración* Es claro que

$$V(B_p(0, R)) = \int \cdots \int_{B_p(0, R)} 1 dx_1 \cdots dx_n.$$

Sea  $B_p^+(0, R) = B_p(0, R) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n\}$  y entonces es claro que  $V(B_p(0, R)) = 2^n V(B_p^+(0, R))$ . Considérese el homeomorfismo  $g : B_1^+(0, 1) \rightarrow B_p^+(0, R)$  definido por

$$f(y) = (R \sqrt[p]{y_1}, \dots, R \sqrt[p]{y_n})$$

y por tanto el determinante del Jacobiano es

$$f'(y) = \frac{R^n}{p^n} y_1^{\frac{1}{p}-1} \cdots y_n^{\frac{1}{p}-1}.$$

por la fórmula de Dirichlet (ver [21], problema 4216) se tiene

$$\int \cdots \int_{B_1(0,1)} y_1^{\frac{1}{p}-1} \cdots y_n^{\frac{1}{p}-1} dy_1 \cdots dy_n = \frac{\Gamma^n(\frac{1}{p})}{\Gamma(1 + \frac{n}{p})}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(B_p^+(0, R)) &= \frac{R^n}{p^n} \int \cdots \int_{B_1(0,1)} y_1^{\frac{1}{p}-1} \cdots y_n^{\frac{1}{p}-1} dy_1 \cdots dy_n \\ &= \frac{R^n}{p^n} \frac{\Gamma^n(\frac{1}{p})}{\frac{n}{p} \Gamma(\frac{n}{p})} \end{aligned}$$

y se concluye la prueba.  $\square$

Sea  $p$  fijo; como consecuencia de la fórmula de Stirling se obtiene que el volumen de las bolas tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  pues

$$\frac{2^n R^n}{np^{n-1}} \frac{\Gamma^n(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{n}{p})} = \frac{2^n R^n \Gamma^n(1 + \frac{1}{p})}{\Gamma(1 + \frac{n}{p})} \sim \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^n R^n}{n^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Por lo anterior tiene sentido preguntarse para  $p$  fijo, la dimensión donde el volumen de la bola unitaria es máximo. Para  $p = 1$ , la norma romboidal es para la dimensión  $n = 1$  y  $n = 2$  que el volumen es máximo. Para  $p = 3/2$  es en dimensión  $n = 3$  que se da el mayor volumen. Para  $p = 2$ , la norma euclidiana, es en dimensión  $n = 5$  donde se da la bola de mayor volumen. Para  $p = 3$  se tiene  $n = 16$  y para  $p = 4$ ,  $n = 41$ . Sin embargo para  $0 < p < 1$ , la evidencia numérica calculada con Mathematica dice que es  $n = 1$  la dimensión donde se alcanza el mayor volumen. El siguiente resultado es parcial

**Teorema 11.5.7.** *Sea  $1 \leq p < \infty$  un número fijo. Supóngase que la ecuación*

$$\Gamma^x(1 + \frac{1}{p}) [\ln 2 + \ln \Gamma(\frac{1}{p}) - \frac{1}{p} \Gamma'(1 + \frac{x}{p})] = 0.$$

*tiene una única raíz  $x_0$ . Entonces el volumen máximo de  $B_p(0, 1)$  ocurre para alguno de los dos números naturales más próximos a  $x_0$ .*

*Demostración* Considere la función  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \frac{2^x \Gamma^x(1 + \frac{1}{p})}{\Gamma(1 + \frac{x}{p})}.$$

Entonces  $g'(x) = 0$  si y sólo si

$$\Gamma^x(1 + \frac{1}{p}) [\ln 2 + \ln \Gamma(\frac{1}{p}) - \frac{1}{p} \Gamma'(1 + \frac{x}{p})] = 0.$$

Como  $g(x)$  es siempre positiva y porque el volumen de las bolas tiende a cero cuando la dimensión tiende a infinito se tiene el resultado.  $\square$

## 11.6. Las funciones p-circulares

Como una aplicación más amplia del uso de las funciones Gama y Beta de Euler se estudian las funciones  $p$ -circulares, las cuales se pueden considerar como una generalización de las funciones circulares usuales.

Se considera para  $p > 0$  y  $R > 0$  el lugar geométrico  $C_p(R)$  definido por

$$|x|^p + |y|^p = R^p$$

y se observa en primer lugar su simetría con respecto al origen. Es claro que para  $p = 2$  se obtiene el familiar círculo con centro en el origen y radio  $R$ . La figura 11.6 muestra las gráficas para  $p = \frac{1}{2}$ ,  $p = 3$  y  $R = 1$ . Dado un ángulo, se le puede asociar

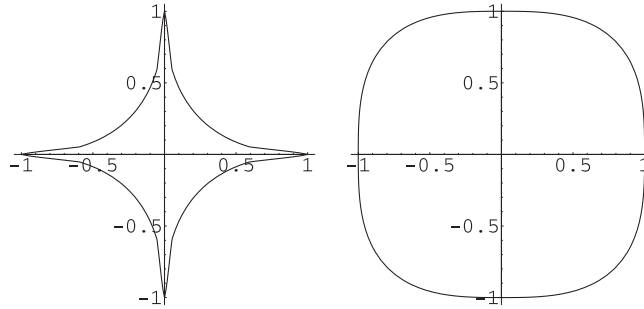


Figura 11.6: Las gráficas de  $C_{\frac{1}{2}}(1)$  y  $C_3(1)$ .

la medida inducida por este lugar geométrico considerando siempre uno de sus lados como el semieje positivo  $x$ . Se mide la longitud del arco subtendido por  $C_p(1)$  entre ambos lados del ángulo y se le denomina la medida del ángulo. Para  $0 < R$  y con la parametrización  $x = R \cos^{\frac{2}{p}} \theta$ ,  $y = R \sin^{\frac{2}{p}} \theta$  se tiene que la longitud de la curva  $C_p(R)$ , denotada por  $2l_{p,R}$ , está dada por

$$2l_{p,R} = \frac{8R}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \tan^{\frac{4}{p}-4} \theta} \sin \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta d\theta \quad (10)$$

Usando la misma parametrización se puede mostrar que la longitud del arco subtendida por  $C_p(R)$  es  $R$  veces la subtendida por  $C_p(1)$ . La figura 11.7 muestra diversas longitudes para  $C_4(1)$ ,  $C_4(\frac{3}{2})$ ,  $C_4(2)$ . La longitud de  $|x|^p + |y|^p = 1$  se denota por  $2l_p$ . El cálculo de las siguientes longitudes está sugerido por el exponente de la tangente en la ecuación 10 y son inmediatas las siguientes

$$2l_{\frac{2}{3},R} = 6R \quad 2l_{1,R} = 4\sqrt{2}R \quad 2l_{2,R} = 2\pi R.$$

El caso  $p = 4$  se calcula usando el programa Mathematica y se obtiene

$$L_{4,R} = -\frac{3^{1/4}R}{4\sqrt{2}\pi^{7/2}\Gamma(\frac{1}{4})} G[\{\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}\}\}, \{\{\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}\}\}, 1].$$

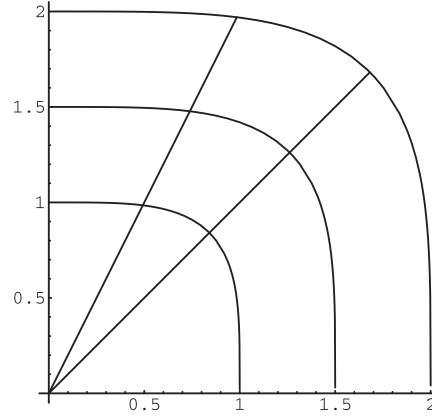


Figura 11.7: Las longitudes  $C_4(2) = 2C_4(1)$ ,  $C_4(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}C_4(1)$ .

donde  $G$  es la función de Meijer y su definición se puede consultar en [18] p. 419-425. Por la gráfica del lugar geométrico  $C_p(R)$  se tiene el comportamiento asintótico

$$2l_{1,R} \leq 2l_{p,R} \quad \text{para cada } p > 0; \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} 2l_{p,R} = \lim_{p \rightarrow R^-} 2l_{p,R} = 8R.$$

Como es usual, el cálculo del área limitada por  $C_p(R)$  tiene una fórmula cerrada más fácil que la longitud de arco. Se obtiene inmediatamente

$$A_{p,R} = 4 \int_0^R \sqrt[p]{R^p - x^p} dx.$$

Tomando el cambio  $u = \frac{x^p}{R^p}$  se obtiene (ver 9)

$$\begin{aligned} A_{p,R} &= \frac{4R^2}{p} \int_0^1 u^{\frac{1}{p}-1} (1-u)^{\frac{1}{p}} du = \frac{4R^2}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{4R^2}{p^2} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(1 + \frac{2}{p})} = \frac{2R^2}{p} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})}. \end{aligned}$$

Nuevamente

$$A_{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}\pi R^2, \quad A_{1,R} = 2R^2, \quad A_{2,R} = \pi R^2, \quad A_{4,R} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{2\sqrt{\pi}} R^2$$

y por la gráfica del lugar geométrico  $C_p(R)$  se tiene

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{2R^2}{p} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})} = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2R^2}{p} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})} = 4R^2.$$



En particular

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{p\Gamma(\frac{2}{p})} = 2.$$

Sea  $\theta = \theta_p(x)$  la longitud de arco desde el punto  $(1, 0)$  hasta el punto  $(x, y)$  de la curva  $|x|^p + |y|^p = 1$ . Se definen las funciones p-circulares básicas

$$\text{sen}_p \theta = y, \quad \text{cos}_p \theta = x$$

y de la forma usual las otras funciones faltantes. Es claro que son funciones periódicas con

$$\text{sen}_p(\theta) = \text{sen}_p(2l_p + \theta) \quad \text{cos}_p(\theta) = \text{cos}_p(2l_p + \theta)$$

y  $[0, 2l_p]$  es un dominio fundamental. El siguiente teorema resume algunas propiedades básicas de las funciones p-circulares.

**Teorema 11.6.1.** Sean  $\text{sen}_p : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  y  $\text{cos}_p : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  las funciones p-circulares básicas. Entonces

- La función  $\text{sen}_p \theta$  es impar y  $\text{cos}_p \theta$  es par, es decir

$$\text{sen}_p(-\theta) = -\text{sen}_p \theta \quad \text{cos}_p(-\theta) = \text{cos}_p \theta$$

para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- Se tienen los siguientes valores fundamentales

$$\begin{array}{lll} \text{sen}_p 0 = 0, & \text{sen}_p \frac{l_p}{4} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}}, & \text{sen}_p \frac{l_p}{2} = 1, \\ \text{cos}_p 0 = 1, & \text{cos}_p \frac{l_p}{4} = \sqrt[p]{\frac{1}{2}}, & \text{cos}_p \frac{l_p}{2} = 0, \\ \tan_p 0 = 0, & \tan_p \frac{l_p}{4} = 1, & \tan_p \frac{l_p}{2} = \infty. \end{array}$$

- Las identidades pitagóricas son

$$\text{sen}_p^p \theta + \text{cos}_p^p \theta = 1, \quad 1 + \tan_p^p \theta = \sec_p^p \theta, \quad 1 + \cot_p^p \theta = \csc_p^p \theta.$$

La forma anterior de definir las funciones p-circulares es una generalización directa de lo que ocurre en el caso de las funciones trigonométricas. Se introduce ahora una parametrización que aparece en [16] y seguiremos su línea de argumentación.

Se desean definir funciones seno y coseno que satisfagan la propiedad conocida en el círculo de que el área del sector circular subtendido por el ángulo es igual a la mitad del ángulo. Así pues se definen  $\text{Cos}_p = \text{Cos}_p(\phi)$ ,  $\text{Sen}_p = \text{Sen}_p(\phi)$  de tal forma que el área del sector acotado por  $|x|^p + |y|^p = 1$  entre los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(x, y) = (\text{Cos}_p \phi, \text{Sen}_p \phi)$  sea  $\frac{\phi}{2}$ . De la figura 11.8 se tiene para  $0 \leq x \leq 1$ ,

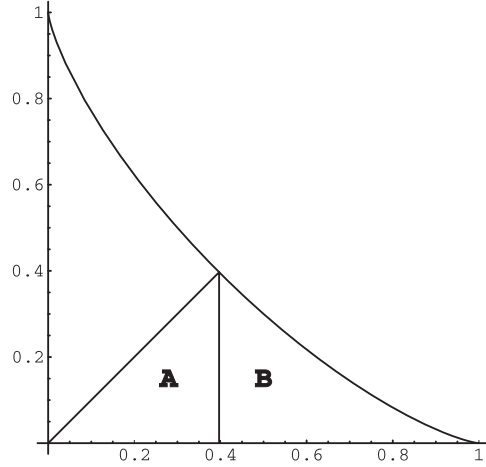


Figura 11.8: Las áreas  $A$  y  $B$  limitadas por  $x^p + y^p = 1$ .

$$0 \leq y \leq 1$$

$$\phi = 2\text{Área (A)} + 2\text{Área (B)}$$

donde

$$\text{Área (A)} = \frac{1}{2}x \sqrt[p]{1-x^p} = \frac{1}{2}y \sqrt[p]{1-y^p}$$

y

$$\text{Área (B)} = \int_x^1 \sqrt[p]{1-t^p} dt = \int_{\sqrt[p]{1-y^p}}^1 \sqrt[p]{1-t^p} dt.$$

En términos de funciones inversas esto dice que para  $0 \leq x \leq 1$

$$\text{ArcCos}_p(x) = x \sqrt[p]{1-x^p} + 2 \int_x^1 \sqrt[p]{1-t^p} dt$$

y que para  $0 \leq y \leq 1$

$$\text{ArcSen}_p(y) = y \sqrt[p]{1-y^p} + 2 \int_{\sqrt[p]{1-y^p}}^1 \sqrt[p]{1-t^p} dt.$$

Derivando las expresiones anteriores y después integrando se obtiene para  $0 \leq x \leq 1$

$$\text{ArcCos}_p(x) = \int_x^1 (1-t^p)^{\frac{1}{p}-1} dt = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} B_{x^p}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)$$

y para  $0 \leq y \leq 1$

$$\text{ArcSen}_p(y) = \int_0^y (1-t^p)^{\frac{1}{p}-1} dt = \frac{1}{p} B_{y^p}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)$$

donde  $B_x$  es la función incompleta Beta dada para  $0 < p, q$  por

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Se extienden los dominios de las funciones inversas al intervalo  $[-1, 1]$  cuidando la simetría y paridad, lo cual puede hacerse sustituyendo  $t$  por  $|t|$ .

Sea  $k(p) = 2 \operatorname{ArcSen}_p(1)$ , el análogo de  $\pi$  para la curva  $C_p$ . Más concretamente

$$k(p) = \frac{2}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{p} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})}$$

y se verifica la misma fórmula que es válida para el círculo

$$A_{p,R} = k(p) R^2. \quad (11)$$

La figura 11.9 muestra la gráfica de la función  $k(p)$  y de la fórmula **11** se deducen los límites siguientes

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} k(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} k(p) = 4.$$

Los valores calculados en nuestros ejemplos son

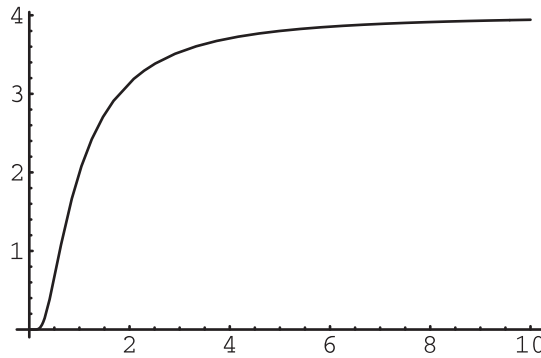


Figura 11.9: La función  $k(p) = \frac{2}{p} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})}$

$$k\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8}\pi, \quad k(1) = 2, \quad k(2) = \pi, \quad k(4) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{2\sqrt{\pi}}.$$

Cabe mencionar que integrales del tipo

$$\frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{p}{n}\right)$$

fueron estudiadas por Euler en su trabajo *De productis ex infinitis factoribus ortis*, sometido a la Academia de San Petersburgo en 1739 y publicado en 1750 [1]. Se observa que la relación entre las parametrizaciones usadas para definir las funciones p-circulares es

$$\phi = \text{ArcCos}_p(\cos_p \theta)$$

y que para  $p = 2$  se tiene  $\phi = \theta + 2k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 11.6.2.**

$$(\text{Sen}_p \phi)' = \text{Cos}_p^{p-1} \phi, \quad (\text{Cos}_p \phi)' = -\text{Sen}_p^{p-1} \phi, \quad (\text{Tan}_p \phi)' = \text{Sec}_p^2 \phi.$$

*Demostración* Se tiene por ejemplo que

$$(\text{ArcSen } y)' = (1 - y^p)^{\frac{1}{p}-1}.$$

Tomando  $y = \text{Sen}_p \phi$ , por el teorema de la función inversa

$$(\text{Sen}_p \phi)' = (1 - \text{Sen}_p^p \phi)^{1-\frac{1}{p}} = (\text{Cos}_p^p \phi)^{1-\frac{1}{p}} = \text{Cos}_p^{p-1} \phi.$$

Para derivar a la tangente se tiene

$$(\text{Tan}_p \phi)' = \frac{\text{Cos}_p \phi (\text{Sen}_p \phi)' - \text{Sen}_p \phi (\text{Cos}_p \phi)'}{\text{Cos}_p^2 \phi} = \frac{\text{Cos}_p^p \phi + \text{Sen}_p^p \phi}{\text{Cos}_p^2 \phi} = \text{Sec}_p^2 \phi. \square$$

Sea  $\Omega = \{ m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z} \}$  la retícula generada por  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ , con  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$ . La función elíptica de Weierstrass  $\mathcal{P}_\Omega$  asociada con la retícula es

$$\mathcal{P}_\Omega(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

**Teorema 11.6.3.** Cada función elíptica de Weierstrass  $\mathcal{P}_\Omega$  satisface la ecuación diferencial

$$\mathcal{P}'_\Omega = 4\mathcal{P}_\Omega^3 - g_2\mathcal{P}_\Omega - g_3 \quad (12)$$

donde  $g_2$  y  $g_3$  son constantes que dependen de  $\Omega$ . Recíprocamente, dados cualesquiera números  $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$  con  $g_2^2 - 27g_3^3 \neq 0$  existe una única retícula  $\Omega$  tal que  $\mathcal{P}_\Omega$  satisface la ecuación diferencial.

En adelante nos referimos a  $\mathcal{P}_\Omega$  a la solución de **12** para los valores  $g_2 = -4$ ,  $g_3 = 0$ . El siguiente resultado es de A. Levin [16]

**Teorema 11.6.4.** Las funciones  $\text{Sen}_4, \text{Cos}_4$  satisfacen para cada  $\phi \in \mathbb{R}$

$$\text{Cot}_4^2 \phi = \frac{\text{Cos}_4^2 \phi}{\text{Sen}_4^2 \phi} = \mathcal{P}(\phi) \quad (13)$$

donde se permite el valor  $\infty$  y los valores límites donde haya indefinición de las funciones  $\text{Sen}_4 \phi$  o  $\text{Cos}_4 \phi$ .

*Demostración* Considérese la función  $\text{Cot}_4^2 \phi$  entonces

$$(\text{Cot}_4^2 \phi)' = \left( \frac{\text{Cos}_4^2 \phi}{\text{Sen}_4^2 \phi} \right)' = 2 \text{Cot}_4^2 \phi \frac{-\text{Sen}_4^4 \phi - \text{Cos}_4^4 \phi}{\text{Sen}_4^2 \phi} = -2 \frac{\text{Cos}_4^2 \phi}{\text{Sen}_4^3 \phi}.$$

Por otra parte

$$\text{Cot}_4^6 \phi + \text{Cot}_4^2 \phi = \text{Cot}_4^2 \phi (1 + \text{Cot}_4^4 \phi) = \text{Cot}_4^2 \phi \frac{1}{\text{Sen}_4^4 \phi} = \frac{\text{Cos}_4^2 \phi}{\text{Sen}_4^6 \phi}$$

y por tanto  $\text{Cot}_4^2 \phi$  satisface la ecuación diferencial **12**. La solución general de esta ecuación es  $y = \mathcal{P}(\phi + a)$  con  $a \in \mathbb{C}$ . Ya que  $\text{Cot}_4^2 \phi$  y  $\mathcal{P}(\phi)$  son ambas infinitas en  $\phi = 0$  y  $\mathcal{P}(\phi)$  tiene un único polo en su retícula fundamental se sigue que  $\text{Cot}_4^2 \phi = \mathcal{P}(\phi)$ .  $\square$

Se tiene el siguiente resultado

**Teorema 11.6.5.** *La función  $\mathcal{P}$  satisface la siguiente igualdad*

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{k(4)}{2}} \sqrt{1 + \mathcal{P}^3(\phi)} \text{Csc}_4^3 \phi d\phi \\ &= -\frac{3^{1/4} R}{4\sqrt{2}\pi^{7/2}\Gamma(\frac{1}{4})} G[\{\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}\}\}, \{\{\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}\}\}, 1]. \end{aligned}$$

*Demostración* Se considera la parametrización  $x = \text{Cos}_4 \phi$ ,  $y = \text{Sen}_4 \phi$  de  $C_4$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{(\text{Cos}_4 \phi')^2 + (\text{Sen}_4 \phi')^2} &= \sqrt{\text{Sen}_4^6 \phi + \text{Cos}_4^6 \phi} = \sqrt{1 + \frac{\text{Cos}_4^6 \phi}{\text{Sen}_4^6 \phi} \frac{1}{\text{Sen}_4^3 \phi}} \\ &= \sqrt{1 + \mathcal{P}^3(\phi)} \text{Csc}_4^3 \phi. \end{aligned}$$

y se calcula la longitud de arco.  $\square$

**Agradecimientos.** Ambos autores cuentan con el apoyo del CONACYT, proyecto 25214. El segundo autor también es becario de COFAA y EDI del IPN.



# Bibliografía

- [1] L. EULER *Opera Omnia*, sub auspiciis societatis scientiarum naturalium Helveticae, Series I-IV A, 1911-
- [2] W. DUNHAM *Euler, The Master of Us All*, The Mathematical Association of America, The Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, p.1-185, 1999.
- [3] W. DUNHAM *The Genius of Euler. Reflections on his life and work*, The Mathematical Association of America, 1-309, 2007.
- [4] JONATHAN SONDOW *A geometric proof that  $e$  is irrational and a new measure of its irrationality*, The American Mathematical Monthly, Vol. 113, p. 637-641, 2006. Num. 7,
- [5] S.M. ZEMYAN *On the zeroes of the  $n$ -th partial sum of the exponential series*, American mathematical Monthly, 112, p. 891-908 Dec. 2005.
- [6] G. PÓLYA AND G. SZEGÖ *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Erter Band, Springer Verlag, Berlin, 1964.
- [7] D.J. NEWMAN, T.J. RIULIN *The zeroes of partial sums of the exponential function*, J. Approx. Theory 5, p. 405-412, 1972.
- [8] S KAKEYA *On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients*, Tokoku Math. Journal p. 140-142.
- [9] E.B. SAFF AND R.S. VARGA *Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials*, SIAM J. Math. Anal. 7 , p. 344-357, 1976.
- [10] M. MARDEN *Geometry of polynomials*, American Mathematical Society, Providence, 1966.
- [11] A. W. ROBERTS, D.E. VARBEG *Convex functions*, Math. 57, Acad. Press. 1973.
- [12] VLADIMIR ARNOL'D *Ordinary differential equations*, Springer Verlag, p. 334. 1992.

- [13] F BRACKS, R. DELANGHE AND F. SOMMEN *Clifford analysis*, Research Notes in Mathematics, Pitman Advanced Publishing Program, p. 1-301, 1982.
- [14] R. REMMERT *Classical topics in complex function theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1-349, 1998.
- [15] A.M. LEGENDRE *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures*, Mme Ve Courcier, Paris, I (1811), II (1817), III (1816).
- [16] A. LEVIN *A Geometric interpretation of an infinite product for the Lemniscate Constant*, American Mathematical Monthly, No. 113, p. 510-520, June-July 2006.
- [17] JOHN B. CONWAY *Functions of one complex variable I*, Graduate Texts in Mathematics, Second Edition, Springer, p. 1-317, 1991.
- [18] LARRY C. ANDREWS *Special functions of mathematics for engineers*, Second Edition, McGrawHill, p.1-479, 1992.
- [19] GOPALA KRISHNA SRINIVISAN *The Gamma function: an eclectic tour*, Amer. Math. Monthly. p. 297-314, April, 2007.
- [20] L. F. RESÉNDIS O. *Coordenadas romboidales*, Gyros, UAM-Azc. CBI, Año 4, Num.6, 1997.
- [21] B.P. DEMIDOVICH *5000 Problemas de análisis matemático*, Ed. Paraninfo, Sexta Edición, 1997.



## Capítulo 12

# Caminos eulerianos y la fórmula de Euler

Guadalupe Rodríguez Sánchez <sup>1</sup> y  
Francisco Javier Zaragoza Martínez <sup>2</sup>

### Resumen

Euler escribió uno de los primeros artículos acerca de la teoría de gráficas en el cual discute la ausencia de solución al problema de los puentes de Koenigsberg. También estudió algunas propiedades de las gráficas dibujadas en superficies. En este capítulo abordaremos estos dos temas, su desarrollo histórico y algunos problemas abiertos.

### 12.1. Introducción

Casi todas las definiciones de teoría de gráficas de este capítulo están tomadas de [1]. Una *gráfica*  $G$  es una tripleta ordenada  $(V(G), E(G), f_G)$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito de *vértices*,  $E(G)$  es un conjunto finito de *aristas* (donde  $V(G) \cap E(G) = \emptyset$ ) y  $f_G$  es una función de *incidencia* que asocia a cada arista de  $G$  una pareja *no ordenada* de vértices de  $G$  (no necesariamente distintos). Al dibujar una gráfica

---

<sup>1</sup>Departamento de Ciencias Básicas, Grupo de Teoría de Números y Combinatoria  
UAM Azcapotzalco, [rsmg@correo.azc.uam.mx](mailto:rsmg@correo.azc.uam.mx)

<sup>2</sup>Departamento de Sistemas, Área de Sistemas Computacionales  
UAM Azcapotzalco, [franz@correo.azc.uam.mx](mailto:franz@correo.azc.uam.mx)

representaremos sus vértices con puntos y sus aristas con líneas uniendo parejas de puntos, teniendo cuidado que cada una de estas líneas no contenga más puntos que éstos ni se cruce a sí misma.

Si  $e \in E(G)$  y  $u, v \in V(G)$  son tales que  $f_G(e) = \{u, v\}$  entonces decimos que  $e$  une a  $u$  y a  $v$ , que  $u$  y  $v$  son los *extremos* de  $e$ , que  $u$  y  $v$  son *incidentes* con  $e$  y viceversa. Si  $f_G(e) = \{u\}$  entonces decimos que  $e$  es un *lazo*. El *grado*  $d_G(v)$  de un vértice  $v$  de  $G$  es el número de aristas de  $G$  incidentes con  $v$  (donde los lazos se cuentan dos veces). Un *camino* de  $G$  es una secuencia finita

$$(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k) \quad (1)$$

con  $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$  y  $e_1, \dots, e_k \in E(G)$  tal que, para toda  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  y  $v_i$  son los extremos de  $e_i$ . Si  $v_0 = v_k$  entonces el camino es un *circuito*. Dos vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  están *conectados* si existe algún camino de  $G$  con  $v_0 = u$  y  $v_k = v$ . Decimos que  $G$  es *conexa* si todas las parejas de vértices de  $G$  están conectadas. Finalmente, si la gráfica  $G$  y su función de incidencia  $f_G$  quedan claras del contexto, entonces denotaremos a  $G$  simplemente como la pareja ordenada  $(V, E)$ .

## 12.2. Los puentes de Koenigsberg

En 1736, el gran matemático suizo Leonhard Euler escribió [2]:

*El problema, el cual me dicen es ampliamente conocido, es como sigue: en Koenigsberg, Prusia, existe una isla A llamada Kneiphof y el río que la rodea se divide en dos ramas, como se puede ver en la figura 12.1, y esas ramas son atravesadas por siete puentes a, b, c, d, e, f y g. Acerca de estos puentes se preguntó si acaso alguien podría organizar una ruta de modo que cruzara cada puente exactamente una vez. Me dijeron que algunas personas aseguraban que esto es imposible, mientras que otras dudaban, pero que nadie aseguraría que de hecho era posible. De esto he formulado el problema general: sin importar como se divida el río en ramas y sin importar el número de puentes que existan ¿podrá uno decidir si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez?*

Koenigsberg se llama actualmente Kaliningrado, forma parte de Rusia (como antes formó parte de Alemania, Polonia y Prusia), aunque no se puede viajar de Kaliningrado a Moscú sin salir del territorio ruso. En 1875 se construyó un puente al oeste de la isla Kneiphof uniendo las regiones marcadas con  $B$  y  $C$  en el mapa y volviendo afirmativa la respuesta a la pregunta de Euler. En 1944, durante la Segunda Guerra Mundial, la ciudad de Koenigsberg fue bombardeada por los aliados y los puentes fueron destruidos. Cinco de los puentes originales fueron reconstruidos (todos excepto los puentes  $b$  y  $d$ ) y la respuesta a la pregunta de Euler siguió siendo afirmativa. El nombre de la ciudad de Koenigsberg usado por Euler en su artículo escrito en latín es

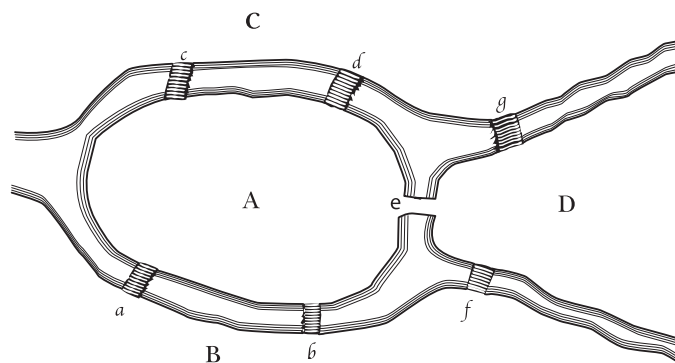


Figura 12.1: Los siete puentes de Königsberg.

el de *Regiomonti* que tiene el mismo significado de *monte del rey* o *monte real* que el nombre en alemán. Por supuesto, otras ciudades del mundo comparten el mismo nombre, siendo las más famosas Montreal y Monterrey.

Se reconoce de manera muy amplia que el artículo de Euler dio origen a lo que él llamó la *geometría de la posición*, es decir, lo que actualmente llamamos teoría de gráficas y topología. Más aún, el problema que él formuló se convirtió en el primero de una clase de problemas que llamamos *problemas de rutas*. En esta sección nos concentraremos en la pregunta original de Euler, así como en algunas variantes y generalizaciones. Al lector interesado en problemas de rutas le sugerimos revisar el libro editado por Dror [3] o las reseñas escritas por Ahr [4], Assad y Golden [5], Eiselt, Gendreau y Laporte [6, 7] y Guan [8].

### 12.2.1. Caminos y circuitos eulerianos

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica. Un camino de  $G$  es *euleriano* si contiene cada arista de  $G$  exactamente una vez. Entonces la pregunta de Euler se puede reformular como ¿podrá uno decidir si una gráfica tiene o no un camino euleriano? De manera similar, un circuito de  $G$  es *euleriano* si contiene cada arista de  $G$  exactamente una vez. Una pregunta similar a la de Euler es ¿podrá uno decidir si una gráfica tiene o no un circuito euleriano?

Diremos que una gráfica es *euleriana* si tiene un circuito euleriano. Euler dió una condición necesaria sencilla para que una gráfica sea euleriana: como se debe entrar y salir de cada vértice el mismo número de veces entonces el grado de todo vértice debe ser par. Sin embargo, la prueba de que estas condiciones también son suficientes vino

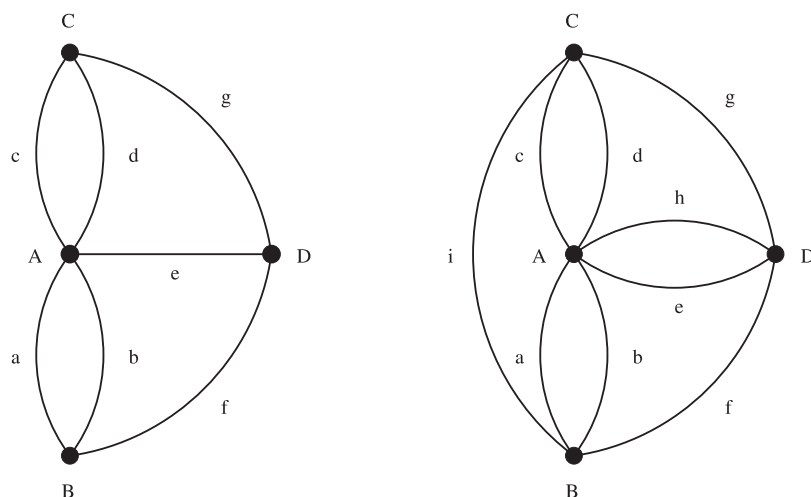


Figura 12.2: Dos gráficas: una euleriana y la otra no.

más de un siglo después, en un artículo póstumo de Hierholzer escrito en 1873 [9].

**Teorema 12.2.1** (Euler y Hierholzer). *Sea  $G$  una gráfica conexa. Entonces  $G$  es euleriana si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.*

En lo que respecta a la pregunta original de Euler, es fácil convencerse de que existe un camino euleriano si y sólo si la gráfica en cuestión tiene un máximo de dos vértices de grado impar. Más aún, si tiene vértices de grado impar el camino euleriano debe comenzar en uno y terminar en el otro.

A la izquierda de la figura 12.2 mostramos la gráfica correspondiente a los siete puentes de Königsberg. Observe que esta gráfica es conexa pero tiene vértices de grado impar y por lo tanto no puede ser euleriana. A la derecha de la misma figura mostramos una gráfica conexa con todos sus vértices de grado par y por lo tanto es euleriana. Un circuito euleriano de esta gráfica es

$$(A, a, B, b, A, c, C, d, A, e, D, f, B, i, C, g, D, h, A). \quad (2)$$

Una vez que se ha determinado que una gráfica es euleriana, aun queda el problema de encontrar un circuito euleriano. Aparentemente, Euler no consideraba que esta pregunta fuera muy importante y nunca dió detalles explícitos acerca de la construcción de un circuito euleriano:

*Cuando se ha determinado que tal recorrido se puede hacer, uno todavía tiene que descubrir como debe organizarse [...] es una tarea sencilla la de construir la ruta requerida [...] por lo que no pienso que valga la pena dar más detalles acerca de la búsqueda de las rutas.*

Estos detalles fueron dados por primera vez por Hierholzer [9]. De hecho, el algoritmo dado por él descubre un circuito euleriano o muestra que la gráfica no es euleriana usando un número de pasos proporcional al número de vértices y aristas de la gráfica. En otras palabras, el algoritmo de Hierholzer es lineal en el *tamaño* de la gráfica.

Las gráficas eulerianas han sido estudiadas ampliamente. Al lector interesado en este tema le sugerimos los dos libros escritos por Fleischner [10, 11].

### 12.2.2. Gráficas dirigidas eulerianas

Una *gráfica dirigida*  $D$  es una tripleta ordenada  $(V(D), A(D), f_D)$  donde  $V(D)$  es un conjunto finito de *vértices*,  $A(D)$  es un conjunto finito de *arcos* (donde  $V(D) \cap A(D) = \emptyset$ ) y  $f_D$  es una función de *incidencia* que asocia a cada arco de  $D$  una pareja ordenada de vértices de  $D$  (no necesariamente distintos). Si  $a \in A(D)$  y  $u, v \in V(D)$  son tales que  $f_D(a) = (u, v)$  entonces decimos que  $a$  *sale* de  $u$  y *entra* a  $v$  (y lo dibujaremos como una línea con una flecha que apunta de  $u$  a  $v$ ). Si  $v$  es un vértice de  $D$  entonces su *grado externo* es el número de arcos de  $D$  que salen de  $v$  y su *grado interno* es el número de arcos de  $D$  que entran a  $v$ . Un *camino* de  $D$  es una secuencia finita

$$(v_0, a_1, v_1, \dots, a_k, v_k) \quad (3)$$

con  $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(D)$  y  $a_1, \dots, a_k \in A(D)$  tal que, para toda  $1 \leq i \leq k$ ,  $a_i$  sale de  $v_{i-1}$  y entra a  $v_i$ . Si  $v_0 = v_k$  entonces el camino es un *circuito*. La pareja ordenada  $(u, v)$  de vértices de  $D$  está *conectada* si existe algún camino de  $D$  con  $v_0 = u$  y  $v_k = v$ . Decimos que  $D$  es *conexa* si todas las parejas ordenadas de vértices de  $D$  están conectadas. Como antes, si  $D$  y  $f_D$  quedan claras del contexto, entonces denotaremos a  $D$  simplemente como  $(V, A)$ .

Podemos considerar una primera variante a la pregunta de Euler como sigue. Sea  $D = (V, A)$  una gráfica dirigida. Un circuito de  $D$  es *euleriano* si contiene cada arco de  $D$  exactamente una vez. Diremos que una gráfica dirigida es *euleriana* si tiene algún circuito euleriano. Kőnig dió una caracterización de las gráficas dirigidas eulerianas en su libro de 1936 [12, página 29]. Cabe mencionar que al libro de Kőnig se le considera el primero escrito acerca de teoría de gráficas y que fue publicado exactamente 200 años después del artículo de Euler.

**Teorema 12.2.2 (Kőnig).** *Una gráfica dirigida conexa es euleriana si y sólo si los grados interno y externo de cada vértice son iguales.*

A la izquierda de la figura 12.3 mostramos una gráfica dirigida conexa que tiene vértices con grados interno y externo distintos y por lo tanto no puede ser euleriana. A la derecha de la misma figura mostramos una gráfica dirigida conexa todos cuyos vértices tienen sus grados internos y externos iguales y por lo tanto es euleriana. Un circuito euleriano de esta gráfica dirigida es

$$(A, c, C, i, B, a, A, e, D, g, C, d, A, h, D, f, B, b, A). \quad (4)$$

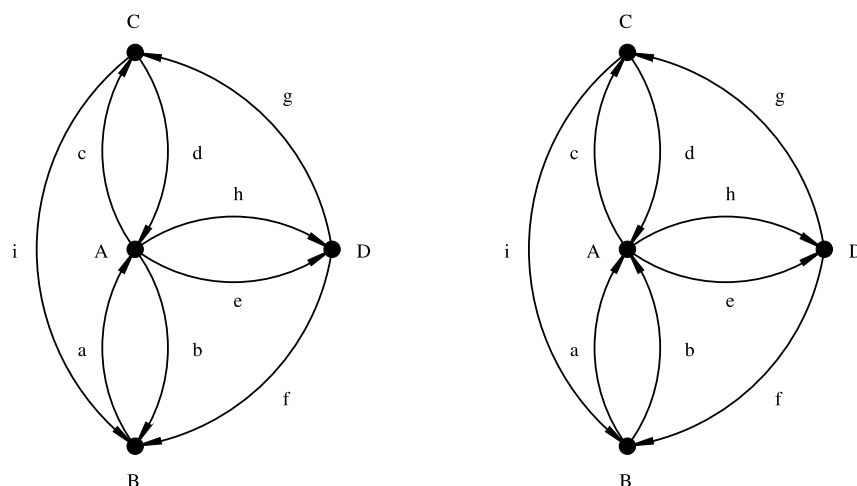


Figura 12.3: Dos gráficas dirigidas: una euleriana y la otra no.

### 12.2.3. Gráficas mixtas eulerianas

Una *gráfica mixta*  $M$  es una cuarteta ordenada  $(V(M), E(M), A(M), f_M)$  donde  $V(M)$  es un conjunto finito de *vértices*,  $E(M)$  es un conjunto finito de *aristas*,  $A(M)$  es un conjunto finito de *arcos* (donde  $V(M) \cap E(M) = E(M) \cap A(M) = A(M) \cap V(M) = \emptyset$ ) y  $f_M$  es una función de *incidencia* que asocia a cada arista de  $M$  una pareja *no ordenada* de vértices de  $M$  y a cada arco de  $M$  una pareja *ordenada* de vértices de  $M$  (en ambos casos, no necesariamente distintos). Las definiciones de *camino*, *circuito* y *gráfica mixta conexa* se pueden dar de forma similar a las anteriores. De igual manera, si  $M$  y  $f_M$  quedan claras del contexto, entonces denotaremos a  $M$  simplemente como  $(V, E, A)$ .

Una segunda variante de la pregunta de Euler es como sigue. Sea  $M = (V, E, A)$  una gráfica mixta. Un circuito de  $M$  es euleriano si contiene cada arista y cada arco de  $M$  exactamente una vez. Decimos que una gráfica mixta es *euleriana* si tiene un circuito euleriano. Ford y Fulkerson dieron una caracterización de las gráficas mixtas eulerianas en su libro de 1962 [13, página 60].

**Teorema 12.2.3** (Ford y Fulkerson). *Sea  $M$  una gráfica mixta conexa. Entonces  $M$  es euleriana si y sólo si para todo subconjunto  $S$  de los vértices de  $M$  el número de arcos y aristas que van del complemento de  $S$  a  $S$  menos el número de arcos que van de  $S$  a su complemento es un número par no negativo.*

La necesidad se debe a que si  $S$  es un subconjunto de los vértices de  $M$  entonces se *debe poder entrar* a  $S$  al menos tantas veces como se *debe salir* de  $S$  y, en cualquier caso, el número total de entradas y salidas de  $S$  debe ser par.

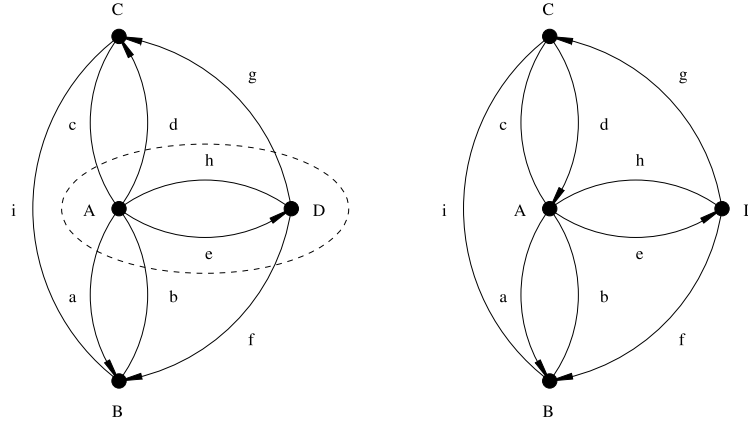


Figura 12.4: Dos gráficas mixtas: una euleriana y la otra no.

A la izquierda de la figura 12.4 mostramos una gráfica mixta para la cual el conjunto  $S = \{A, D\}$  no cumple la condición del teorema 12.2.3 y por lo tanto no puede ser euleriana. A la derecha de la misma figura mostramos una gráfica mixta euleriana, uno de cuyos circuitos eulerianos es

$$(A, a, B, i, C, d, A, e, D, f, B, b, A, h, D, g, C, c, A). \quad (5)$$

El problema de decidir si existe un circuito euleriano en una gráfica mixta (y en su caso, construirlo) es más difícil que los problemas correspondientes para las gráficas normales y dirigidas, pues requiere del uso de técnicas de *flujo en redes*. Sin embargo, existen algoritmos *eficientes* para resolver este problema.

#### 12.2.4. El problema del cartero chino

En 1960, el matemático chino Mei Gu Guan propuso lo siguiente [14]:

*Cuando el autor estaba dibujando un diagrama para la ruta de un cartero, él descubrió el siguiente problema: Un cartero tiene que cubrir su ruta asignada antes de regresar a la oficina postal. El problema es encontrar la distancia más corta que debe caminar.*

A Guan se le conoce mundialmente como *el cartero chino* y al problema que propuso se le conoce como el *problema del cartero chino* (aunque hay cierta discusión acerca de si debiera llamársele el *problema chino del cartero*).

Naturalmente, si la ruta del cartero corresponde con una gráfica euleriana entonces la respuesta queda dada por la longitud de cualquiera de sus circuitos eulerianos. De manera más general, dada una gráfica  $G$ , un circuito de  $G$  es una *ruta de cartero* de

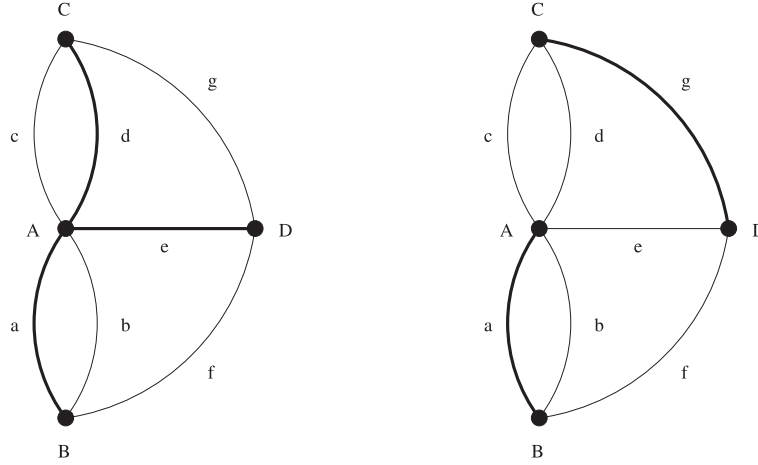


Figura 12.5: Una gráfica no euleriana y dos rutas de cartero.

$G$  si contiene cada arista de  $G$  al menos una vez. Una ruta de cartero de la gráfica mostrada en la figura 12.5 es

$$(A, a, B, b, A, a, B, f, D, e, A, e, D, g, C, d, A, c, C, d, A). \quad (6)$$

En la figura 12.5 se han marcado con líneas más gruesas aquellas aristas que repitieron: del lado izquierdo las correspondientes a esta ruta de cartero y del lado derecho las aristas correspondientes a una ruta alternativa.

Ya que la gráfica que se obtiene de una gráfica conexa  $G$  duplicando cada una de sus aristas es euleriana, los problemas de decidir si  $G$  tiene una ruta de cartero y de encontrar una de ellas son tan sencillos como los problemas correspondientes para los circuitos eulerianos de una gráfica.

El primer problema interesante es el de encontrar la longitud más corta de una ruta de cartero. Dadas una gráfica conexa  $G = (V, E)$ , una *longitud* no negativa  $\ell_e$  para cada arista  $e \in E$  y una ruta de cartero  $T$  de  $G$ , la *longitud* de  $T$  (a la que denotaremos por  $\ell(T)$ ) es la suma de las longitudes de las aristas usadas por  $T$ , es decir, si  $T = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_1)$  entonces

$$\ell(T) \equiv \sum_{i=1}^k \ell(e_i). \quad (7)$$

Así, el problema del cartero chino es el de encontrar la mínima longitud posible de una ruta de cartero. Como ejemplo, si suponemos que todas las aristas tienen longitud unitaria, entonces una ruta de cartero de la gráfica mostrada en la figura 12.5 de



longitud mínima es

$$(A, a, B, b, A, a, B, f, D, g, C, c, A, d, C, g, D, e, A). \quad (8)$$

No es difícil convencerse de que todo problema de cartero chino tiene alguna ruta de cartero de longitud mínima que usa cada arista a lo sumo dos veces.

En 1965, Edmonds presentó un algoritmo eficiente para resolver el problema del cartero chino [15]. Este algoritmo está basado en otro algoritmo de Edmonds para resolver el problema de *acoplamiento máximo* [16] y en el algoritmo de Floyd para encontrar caminos más cortos entre todas las parejas de vértices de una gráfica [17]. Vale la pena mencionar que el problema del cartero chino tiene muchas aplicaciones (recolección de basura, barrido de calles, remoción de nieve, planeación de rutas de autobús, planeación de museos, dibujo de gráficas y diseño de circuitos impresos) y le sugerimos revisar la reseña de Barahona [18].

El problema del cartero chino en gráficas dirigidas fué resuelto eficientemente por Edmonds y Johnson [19] usando un algoritmo de Edmonds y Karp [20] para el problema de flujo en redes. Por otro lado, Papadimitriou [21] demostró que el problema del cartero chino en gráficas mixtas no puede resolverse de manera eficiente a menos que  $P = NP$ . Basta mencionar que la pregunta de si  $P = NP$  o  $P \neq NP$  es una de las preguntas abiertas más importantes de la teoría de la computación y que hay un millón de dólares (pagaderos por el Clay Mathematics Institute) esperando pacientemente al que la resuelva.

Las variantes más estudiadas del problema del cartero chino en gráficas mixtas tienen que ver con restringir el uso de algún subconjunto de aristas o arcos de la gráfica mixta. Si se prohíbe usar los arcos más de una vez entonces se tienen varios *algoritmos de aproximación* propuestos por Veerasamy [22] y uno de los autores [23]. Estos constituyen los mejores resultados posibles puesto que el problema tampoco se puede resolver de manera eficiente a menos que  $P = NP$  [24]. Por otro lado, si se prohíbe usar las aristas más de una vez entonces ni siquiera se puede encontrar de forma eficiente una ruta de cartero cualquiera a menos que  $P = NP$  [25].

Existen muchas otras variantes del problema del cartero chino que se han estudiado en la literatura: el cartero rural, el cartero con viento, el cartero con jerarquías, el cartero con penalización por tiempo de espera o por vuelta, etc.

### 12.2.5. Problemas abiertos

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica conexa. Un circuito de  $G$  es un *ciclo* si no contiene vértices repetidos. Sea  $2G$  la gráfica que se obtiene de  $G$  *duplicando* cada una de las aristas de  $G$ . Observe que  $2G$  tiene todos sus vértices de grado par y por lo tanto es Euleriana. Esto es equivalente a decir que  $2G$  se puede escribir como la unión de un cierto conjunto de ciclos. Algunos de estos ciclos de  $2G$  corresponderán con ciclos de  $G$  y otros no.

En ocasiones será inevitable que esto último pase: considere por ejemplo lo que pasa cuando  $G$  contiene alguna arista  $e$  tal que su eliminación desconecta a  $G$  (a estas aristas se les llama *puentes*). Es obvio que esta arista no puede pertenecer a ningún ciclo de  $G$  y, por lo tanto, en cualquier descomposición de  $2G$  en ciclos debe existir un ciclo que consista exactamente de las dos copias de la arista  $e$ . De manera independiente, Szekeres [26] y Seymour [27] conjeturaron que éste es el único contraejemplo.

**Conjetura 12.2.4** (Doble cubierta por ciclos). *Si  $G$  es una gráfica conexa sin puentes entonces existe una colección de ciclos de  $G$  de modo que cada arista de  $G$  está contenida en exactamente dos de esos ciclos.*

Se sabe que esta conjetura es cierta para ciertas clases de gráficas. También se sabe que si se reemplaza *dos* por *cuatro* o *seis* entonces los enunciados obtenidos son verdaderos. Estos resultados se presentan en la reseña de Jaeger [28]. Una conjetura más fuerte debida a Goddyn dice que la descomposición existe aún si se fija un ciclo [29].

**Conjetura 12.2.5** (Doble cubierta por ciclos con un ciclo fijo). *Si  $G$  es una gráfica conexa sin puentes y  $C$  es un ciclo de  $G$  entonces existe una colección de ciclos de  $G$  que incluye a  $C$  de modo que cada arista de  $G$  está contenida en exactamente dos de esos ciclos.*

Si en lugar de ciclos se piensa en circuitos entonces Celmins [30] y Preissmann [31] conjeturaron que bastan un número constante de ellos.

**Conjetura 12.2.6** (Doble cubierta por cinco circuitos). *Si  $G$  es una gráfica conexa sin puentes entonces existe una colección de 5 circuitos de  $G$  de modo que cada arista de  $G$  está contenida en exactamente dos de esos circuitos.*

Una *orientación* de  $G$  es una gráfica dirigida  $D = (V, A)$  que se obtuvo de  $G$  reemplazando cada una de sus aristas por un arco con los mismos vértices extremos. Observe que cada ciclo (no necesariamente dirigido) de  $D$  recorre algunos de sus arcos *hacia adelante* y otros *hacia atrás*. La siguiente conjetura se debe a Jaeger [32].

**Conjetura 12.2.7** (Doble cubierta por ciclos orientados). *Si la gráfica dirigida  $D$  es una orientación de la gráfica conexa y sin puentes  $G$  entonces existe una colección de ciclos orientados de  $G$  de modo que cada arco de  $D$  es recorrido hacia adelante exactamente por uno de esos ciclos y hacia atrás exactamente por uno de esos ciclos.*

Como antes, si en lugar de ciclos se piensa en circuitos entonces Jaeger [32] y Archdeacon [33] conjeturaron que bastan un número constante de ellos.

**Conjetura 12.2.8** (Doble cubierta por cinco circuitos orientados). *Si la gráfica dirigida  $D$  es una orientación de la gráfica conexa y sin puentes  $G$  entonces existe una colección de 5 circuitos orientados de  $G$  de modo que cada arco de  $D$  es recorrido hacia adelante exactamente por uno de esos circuitos y hacia atrás exactamente por uno de esos circuitos.*

Sea  $G$  una gráfica euleriana. Observe que si  $G$  tiene algún vértice  $v$  de grado dos entonces todas las descomposiciones de  $G$  en ciclos deben contener algún ciclo que pasa de forma consecutiva por las dos aristas incidentes a  $v$ . Sabidussi conjeturó que éste es el único contraejemplo [34].

**Conjetura 12.2.9** (Compatibilidad). *Sea  $G$  una gráfica euleriana sin vértices de grados dos y sea  $T$  un circuito euleriano de  $G$ . Entonces existe una descomposición de  $G$  en ciclos tal que cada par de aristas consecutivas en  $T$  se encuentran en ciclos distintos.*

Sea  $M = (V, E, A)$  una gráfica mixta y conexa. Recordemos que el problema de decidir si  $M$  tiene un recorrido de cartero que usa cada una de las aristas de  $M$  exactamente una vez no se puede resolver en tiempo polinomial a menos que  $P = NP$ . Sin embargo, este problema se puede resolver en tiempo polinomial en al menos tres situaciones:

1. Si todos los vértices de  $M$  tienen grado total par.
2. Si  $M$  es una gráfica *serie paralelo*.
3. Si  $A$  no contiene ciclos (no necesariamente orientados).

En estos casos también es posible resolver en tiempo polinomial el problema correspondiente de optimización. Así se desprenden dos problemas abiertos:

1. ¿Existirán otras clases naturales de gráficas mixtas para las cuales se puedan resolver ambos problemas en tiempo polinomial?
2. ¿Existirá alguna clase natural de gráficas mixtas para la cual se pueda resolver el problema de factibilidad en tiempo polinomial pero no se pueda resolver el problema de optimización en tiempo polinomial?

Si  $S \subseteq V$  entonces definimos  $d_E(S)$  como el número de aristas entre  $S$  y  $V \setminus S$  y  $d_A(S)$  como el número de arcos que salen de un vértice en  $S$  y entran a un vértice en  $V \setminus S$ . Diremos que  $S$  es *saliente* si  $d_A(V \setminus S) = 0$ , es decir, si ningún arco de  $M$  entra a  $S$ . Observe que si  $M$  tiene un recorrido de cartero que usa cada una de las aristas de  $M$  exactamente una vez entonces se debe cumplir que

$$d_E(S) \leq d_A(S) \quad (9)$$

para cada subconjunto saliente  $S$  (de otro modo, se deberá salir más veces de  $S$  de las que se puede entrar). Si  $S$  es saliente entonces definimos el *exceso* de  $S$  como  $\text{ex}_M(S) = d_A(S) - d_E(S)$ . Así, la condición (9) se puede reformular como

$$0 \leq \text{ex}_M(S) \quad (10)$$

para todo subconjunto saliente  $S$ .

Para  $A, B \subseteq V$  con  $A \cap B = \emptyset$  definimos  $E(A, B)$  como el conjunto de aristas con un extremo en  $A$  y el otro en  $B$ . Se puede demostrar que si  $M$  tiene un recorrido de cartero con las propiedades pedidas y  $S$  y  $T$  son dos subconjuntos salientes entonces

$$|E(S \setminus T, T \setminus S)| \leq \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ex}_M(S) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ex}_M(T) \right\rfloor. \quad (11)$$

De esta forma, tenemos condiciones necesarias para la existencia de estos recorridos de cartero que dependen de uno o dos subconjuntos salientes. De manera similar, en [35] se propone una familia infinita de condiciones necesarias para la existencia de estos recorridos de cartero, a saber, si  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$  son  $k$  conjuntos salientes entonces

$$|E_k^{\mathcal{S}}| \leq \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{1}{2} \text{ex}_M(S_i) \right\rfloor, \quad (12)$$

donde  $E_k^{\mathcal{S}}$  es un cierto subconjunto de las aristas de  $M$  que depende de  $\mathcal{S}$ .

Se cree que la condición de conectividad junto con algún subconjunto de estas condiciones necesarias forman un conjunto de condiciones suficientes para la existencia de estos recorridos de cartero.

**Conjetura 12.2.10** (Zaragoza). *Existe una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  para la cual el siguiente enunciado es verdadero: Una gráfica mixta y conexa  $M = (V, E, A)$  tiene un recorrido de cartero que usa las aristas exactamente una vez si y sólo si satisface la condición (12) para toda  $1 \leq k \leq f(|V|)$ .*

Exhibiremos una familia de ejemplos que demuestran que la función  $f$  de esta conjetura es al menos lineal en  $|V|$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sea  $M_n = (V_n, E_n \cup F_n, A_n)$  la gráfica mixta con conjunto de vértices

$$V_n = \{v_i : 0 \leq i \leq 2n\}, \quad (13)$$

conjunto de arcos

$$A_n = \{a_{2i+1} = (v_{2i+1}, v_{2i}), a_{2i+2} = (v_{2i+1}, v_{2i+2}) : 0 \leq i \leq n-1\} \quad (14)$$

y conjunto de aristas consistiendo de

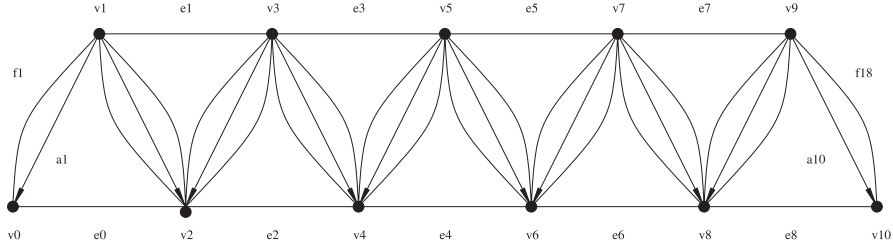
$$E_n = \{e_i = \{v_i, v_{i+2}\} : 0 \leq i \leq n-2\} \quad (15)$$

y de

$$F_n = \{f_i : 1 \leq i \leq 2n-2\}, \quad (16)$$

donde  $f_1 = \{v_0, v_1\}$ ,  $f_{2n-2} = \{v_{2n-1}, v_{2n}\}$  y para cada  $2 \leq j \leq n-1$ ,  $f_{2j-2}, f_{2j-1}$  son dos aristas paralelas al arco  $a_j$ . La figura 12.6 muestra un ejemplo de esta construcción con  $n = 5$ .

**Teorema 12.2.11.** *La gráfica mixta  $M_n$  satisface la condición (12) para cada  $1 \leq k \leq 2n-1$  pero no satisface la condición (12) para  $k = 2n$ .*

Figura 12.6: La gráfica mixta  $M_5$ .

## 12.3. La fórmula de Euler

En 1750, cuando Euler se encontraba en Berlín, envió una carta a Goldbach, en la cual hace la observación de que los números de vértices, aristas y caras en un poliedro están relacionados [36]. Esto es, que el número de caras mas el número de vértices es igual al número de aristas mas dos.

Por *poliedro* se entiende un sólido cuya superficie consta de un cierto número finito de caras poligonales. Usando la notación  $c$  para el número de caras,  $v$  para el número de vértices y  $e$  para el número de aristas del poliedro, se obtiene la siguiente fórmula:

$$c + v = e + 2. \quad (17)$$

A la igualdad anterior se le conoce actualmente como la fórmula de Euler.

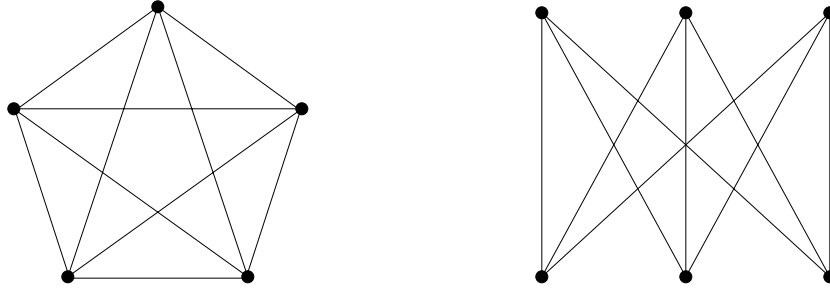
### 12.3.1. Gráficas planas

Un poliedro puede dibujarse como una gráfica en el plano. Así, la fórmula de Euler se verá en el contexto de gráficas y permitirá la caracterización de una familia muy importante de ellas, conocidas como gráficas aplanables.

Una gráfica  $G$  se dice que está *encajada* en una superficie  $S$  si está dibujada sobre  $S$  de tal manera que no haya dos aristas que se intersecten, excepto en el vértice terminal que comparten, si las aristas son adyacentes. Una gráfica es *aplanable* si ésta se puede encajar en el plano. Si  $G$  es una gráfica encajada en el plano, se dice que  $G$  es una gráfica *plana*. Así, una gráfica aplanable puede tener diversos encajes. A las regiones definidas por una gráfica plana se les llama *caras*, a la región no acotada se le conoce como la *cara exterior*.

**Teorema 12.3.1 (Euler).** Sea  $G = (V, E)$  una gráfica aplanable conexa y sea  $C$  el número de caras de algún encaje de  $G$ . Entonces se tiene que

$$|V| - |E| + C = 2. \quad (18)$$

Figura 12.7: Las gráficas  $K_5$  y  $K_{3,3}$ .

*Demostración.* La proposición se demuestra por inducción sobre el número de aristas de  $G$ .

Supongamos que  $|E| = 1$  y sea  $E = \{e\}$ . Se tienen dos casos: En el primer caso  $e$  es un lazo y entonces  $|V| = 1$  y  $C = 2$ . En el segundo caso  $e$  es una arista con dos vértices diferentes, en este caso se tiene  $|V| = 2$  y  $C = 1$ , correspondiente a la cara no acotada. En los dos casos se cumple la fórmula.

En el paso de inducción se consideran dos casos:

Caso 1. Supongamos que  $G$  no contiene ciclos. Para toda gráfica conexa y sin ciclos (a la que se le llama *árbol*) se cumple que  $|E| = |V| - 1$ . Dado que  $G$  no tiene ciclos,  $G$  sólo tiene la cara no acotada, luego  $C = 1$ . Sustituyendo en la fórmula:  $|V| - |E| + C = |V| - |V| + 1 + 1 = 2$ .

Caso 2. Consideremos una arista  $e$  de  $G$  que está contenida en algún ciclo de  $G$ . Sea  $G'$  la gráfica que se obtiene de  $G$  borrando la arista  $e$  en  $G$ . Observe que  $G'$  es conexa. Consideremos un encaje de  $G$  donde la arista  $e$  es adyacente a dos caras distintas de  $G$ , sean éstas  $c$  y  $c'$ ; al eliminar  $e$ , las caras  $c$  y  $c'$  se convierten en una única cara. Sea  $G' = (V', E')$  el encaje correspondiente al eliminar  $e$  del encaje de  $G$ . Por hipótesis de inducción, se tiene que  $|V'| - |E'| + C' = 2$ . Se tiene que  $|V| = |V'|$ ,  $|E| = |E'| + 1$ ,  $C = C' + 1$ , por lo tanto  $|V| - |E| + C = |V'| - |E'| - 1 + |C'| + 1 = 2$ . Luego la fórmula de Euler se cumple para  $G$ .  $\square$

La fórmula de Euler se cumple para toda gráfica aplanable, sin embargo, en general, es difícil probar que una gráfica dada no es aplanable. En 1930, Kuratowski [37] dió una caracterización de aplanabilidad o planaridad de gráficas mediante gráficas minimales no aplanables, llamadas *obstrucciones*. Dichas obstrucciones para planaridad son dos gráficas conocidas como  $K_5$  y  $K_{3,3}$ . En la figura 12.7 se presentan los dibujos más conocidos de  $K_5$  y  $K_{3,3}$ .

La gráfica *completa*  $K_n$  es una gráfica con  $n$  vértices, tal que todo par de vértices son extremos de una arista. Una gráfica  $G = (V, E)$  se dice que es *bipartita* si existe una partición de  $V$  en dos conjuntos  $V_1$  y  $V_2$  tales que cada arista de  $G$  une un vértice de  $V_1$  con un vértice de  $V_2$ . Si  $G$  contiene toda arista  $\{u, v\}$  tal que  $u \in V_1$  y  $v \in V_2$ ,

entonces  $G$  es una gráfica *bipartita completa*. Si  $|V_1| = n$  y  $|V_2| = m$ ,  $G$  se escribe como  $K_{n,m}$ .

Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos gráficas. Se dice que  $G'$  es una *subgráfica* de  $G$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ . Dada una gráfica  $G = (V, E)$ ,  $e = \{x, y\}$  una arista de  $G$  y  $z \notin V \cup E$ , consideremos la gráfica  $G' = (V \cup \{z\}, E \setminus \{x, y\} \cup [\{x, z\}, \{z, y\}])$ .  $G'$  es la gráfica que resulta de  $G$  al *subdividir* la arista  $e$ . Se dice que dos gráficas son *homeomorfas* si una puede ser obtenida de la otra por una sucesión de subdivisiones de aristas.

**Teorema 12.3.2** (Kuratowski). *Una gráfica es aplanable si y sólo si ésta no tiene una subgráfica homeomorfa a  $K_5$  o  $K_{3,3}$ .*

Para demostrar el teorema de Kuratowski deberá probarse que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son gráficas aplanables. La no planaridad de estas gráficas es una consecuencia de la fórmula de Euler, como se verá a continuación. La demostración del teorema 12.3.2 se puede encontrar en [38] o en [39].

**Proposición 12.3.3.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica aplanable con al menos 3 vértices. Entonces*

1.  $|E| \leq 3|V| - 6$ .
2. Si además se considera que  $G$  no contiene triángulos (es decir a  $K_3$  como subgráfica), entonces  $|E| \leq 2|V| - 4$ .

*Demostración.* Para demostrar esta proposición se usará una notación más simple, como se hizo al principio de la sección.

Sean  $v = |V|$ ,  $e = |E|$  y  $c$  el número de caras de  $G$ . Consideremos una gráfica  $G$  aplanable, conexa, sin lazos y que contenga dos o más aristas.

Cada arista pertenece exactamente a dos caras y cada cara tiene al menos 3 aristas, de donde

$$2e \geq 3c. \quad (19)$$

Usando la fórmula de Euler, se tiene que

$$v - e + \frac{2e}{3} \geq 2, \quad (20)$$

y simplificando la desigualdad anterior se tiene demostrado el primer inciso.

Si  $G$  no tiene triángulos, toda cara está acotada por 4 o más aristas y se tiene que  $2e \geq 4c$  y  $v - e + \frac{e}{2} \geq 2$ , es decir  $2v - 4 \geq e$ .  $\square$

**Corolario 12.3.4.**  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no son gráficas aplanables.

*Demostración.* La demostración se efectúa por reducción al absurdo.

Supongamos que  $K_5$  y  $K_{3,3}$  son gráficas aplanables. Para  $K_5$ :  $|V| = 5$ ,  $|E| = 10$ . Por el primer inciso de la proposición 12.3.3,  $10 = |E| \leq 3|V| - 6 = 9$ , contradiciendo que  $K_5$  es aplanable.

Para  $K_{3,3}$ :  $|V| = 6$ ,  $|E| = 9$ . Por el segundo inciso de la proposición 12.3.3,  $9 = |E| \leq 2|V| - 4 = 8$ , se llega a una contradicción, luego  $K_{3,3}$  no es aplanable.  $\square$

Las gráficas aplanables son muy importantes en la teoría de gráficas y en algunas aplicaciones de ésta, por ejemplo en el diseño de circuitos integrados en una única capa, en ellos es inadmisibles el cruce de aristas en algún punto que no sea un vértice del circuito.

Las gráficas aplanables están relacionadas también con el famoso problema de los cuatro colores. El antecedente de este problema se planteó por primera vez en relación con mapas [40]. Se conjetura que cualquier mapa dibujado sobre un plano o una esfera puede colorearse con sólo cuatro colores, de tal manera que no existan dos países adyacentes que tengan el mismo color. La primera vez que apareció publicada esta conjetura fue en 1878, en un artículo de Cayley [41] en los *Proceedings of the London Mathematical Society*.

El problema de los cuatro colores es un problema de teoría de gráficas porque todo mapa produce una gráfica aplanable construida como sigue: a cada país se le asigna un vértice, así como un vértice a la región exterior, dos vértices están unidos por una arista si los países correspondientes tienen una línea fronteriza común. En este contexto, se plantea el siguiente teorema.

**Teorema 12.3.5.** (*Cuatro colores*) *Toda gráfica aplanable se puede colorear con a lo más 4 colores.*

La demostración del teorema de los cuatro colores, ha ocupado a grandes matemáticos, el primer intento de demostración registrado, es de 1879 [42]. En 1976, Appel y Haken proporcionaron una prueba del teorema de los cuatro colores usando una computadora [43, 44, 45]. Ellos dividieron el problema en aproximadamente 2000 casos cuyo análisis duró 1200 horas de cálculos computacionales. En 1997 se dio una demostración del teorema que redujo el número de casos estudiados y en donde se analizan solamente 633 configuraciones [46].

En esta sección, las definiciones relativas a los conceptos de teoría de gráficas que se usaron se tomaron principalmente de [47] y [48].

### 12.3.2. Poliedros regulares

Un poliedro es *simple* si su superficie puede ser deformada con continuidad hasta transformarse en la superficie de una esfera. Un poliedro *regular* es un poliedro simple tal que todas sus caras son copias congruentes del mismo polígono convexo regular y en cada vértice inciden el mismo número de caras. Así, los poliedros son cuerpos



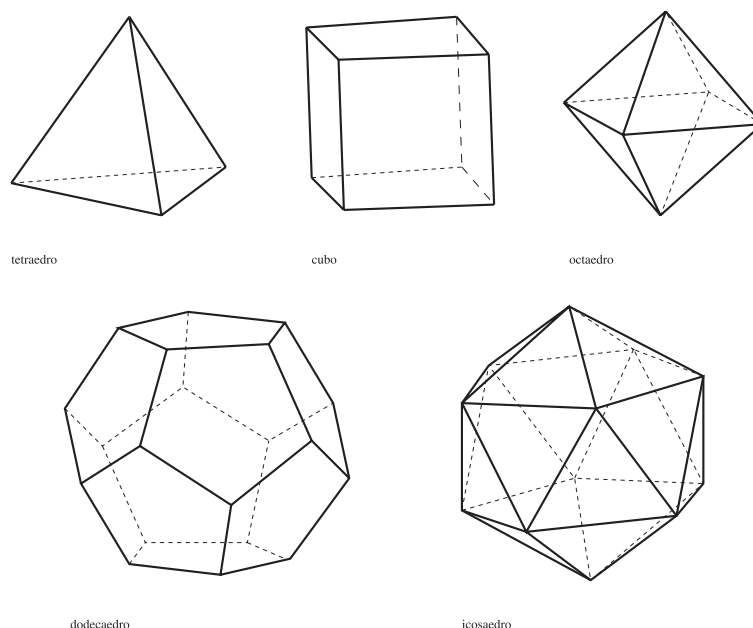


Figura 12.8: Poliedros regulares.

convexos en el espacio tridimensional. Se tiene que la fórmula de Euler se cumple para todos los poliedros simples, en particular para los poliedros regulares.

En un espacio bidimensional, el concepto correspondiente a un poliedro regular es un polígono regular. Hay una infinidad de polígonos regulares. Para cualquier entero positivo  $n$ ,  $n \geq 3$ , se puede construir un  $n$ -ágono regular. Para  $n = 5$  se tiene un pentágono, para  $n = 6$  un exágono, etc. Si se considera el espacio de tres dimensiones, es sorprendente que sólo existan cinco poliedros regulares diferentes. Estos son el cubo, el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, los cuales mostramos en la figura 12.8.

A estos poliedros se les conoce como sólidos platónicos, pues son mencionados en los *Diálogos de Platón*, en particular en *El Timeo* [49]. En *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*, Proclo atribuye a Pitágoras la construcción de las figuras cósmicas [50], como se les llama a los poliedros regulares en la obra citada.

El hecho de que no existen más de cinco poliedros regulares, es una consecuencia de la fórmula de Euler. Para demostrar la afirmación anterior, se asocia una gráfica a cada poliedro regular, es decir se construye un encaje del poliedro en el plano. Se imagina cada poliedro como hueco y hecho de un material flexible como el caucho. Si se separa una de sus caras, se puede deformar la superficie restante hasta extenderla

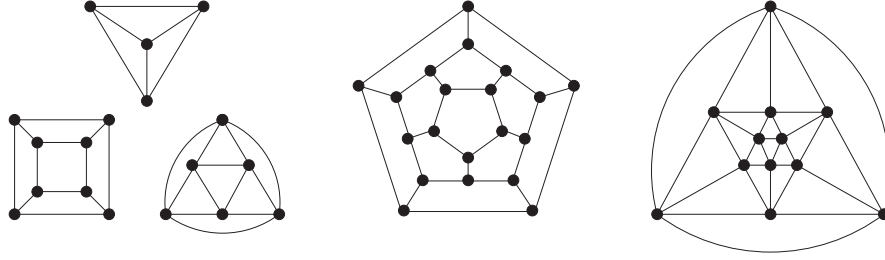


Figura 12.9: Gráficas asociadas a los poliedros regulares.

sobre un plano, la cara eliminada se corresponde con la cara exterior de la gráfica. La gráfica asociada a un poliedro conserva los números de vértices, aristas y caras del poliedro.

**Teorema 12.3.6** (Platón y Pitágoras). *Sólo existen cinco poliedros regulares.*

*Demostración.* Se demostrará que no existen más de cinco poliedros regulares. Sea  $G_P = (V, E)$  la gráfica correspondiente a un poliedro regular  $P$ . Se denota por  $n$  el número de vértices, por  $e$  el número de aristas y por  $c$  el número de caras de  $G_P$ . Como el poliedro es regular, todos los vértices de  $P$  tienen el mismo grado  $d$  y todas las caras están acotadas por  $k$  aristas. Para toda gráfica se cumple que:

$$\sum_{v \in V} d(v) = nd = 2|E| = 2e. \quad (21)$$

La igualdad anterior se tiene porque al contar las aristas incidentes a cada vértice, cada arista se cuenta dos veces, de la misma manera al contar las aristas que acotan cada cara de  $G_P$ , las aristas quedan contadas dos veces. Luego, se tiene que:

$$kc = 2e, \quad (22)$$

Escribiendo  $n$  y  $c$  en función de  $e$  y usando la fórmula de Euler, se tiene:

$$n - e + c = \frac{2e}{d} - e + \frac{2e}{k} = 2, \quad (23)$$

sumando  $e$  y dividiendo por  $2e$  ambos miembros, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \quad (24)$$

Se tiene que  $d, k \geq 3$ . Consideremos las parejas  $(d, k)$ :  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 5)$  y  $(5, 3)$ . Estas son las únicas parejas que satisfacen la igualdad (24). Luego son las únicas que pueden corresponder a un poliedro regular.

La existencia de los cinco poliedros regulares debe verificarse geoméricamente. Esto no se hará, pues es muy complicado y rebasa el objetivo de mostrar una aplicación de la fórmula de Euler.  $\square$

El grado  $d$  de cada vértice y el número de aristas  $k$  que forman cada cara del poliedro determinan de manera única los valores de  $n$ ,  $e$  y  $c$ , que son los parámetros de la gráfica  $G_P$  correspondiente al poliedro  $P$ . A continuación se muestra una tabla con los valores determinados para esos parámetros y el nombre del poliedro al que corresponden.

Poliedro	$d$	$k$	$n$	$e$	$c$
Tetraedro	3	3	4	6	4
Octaedro	3	4	8	12	6
Icosaedro	3	5	20	30	12
Cubo	4	3	6	12	8
Dodecaedro	5	3	12	30	20

### 12.3.3. Gráficas en otras superficies

Lo expuesto hasta aquí muestra una clase de resultados de gran profundidad en combinatoria, que tienen como base fundamental la fórmula de Euler y sustentan una parte importante de la teoría de gráficas.

Se pueden formular algunas preguntas interesantes si se piensa en superficies diferentes al plano y a la esfera. ¿Existirán algunas superficies en las cuales se pueda encajar  $K_5$  o  $K_{3,3}$ ? Inquietudes como esta llevan a una generalización de la fórmula de Euler a superficies diferentes de la esfera y a plantear nuevamente el problema de planaridad de gráficas en tales superficies.

Aquí, el problema de planaridad se está planteando en términos de encajes en la esfera, pues toda gráfica que se puede encajar en la esfera también se puede encajar en un plano y viceversa. Esto puede hacerse mediante una proyección estereográfica o su inversa [51, página 17].

Los conceptos que se tratarán a continuación están dentro del ámbito de la topología algebraica. En esta rama de las matemáticas, el concepto y clasificación de superficies es fundamental. Aquí no se toman en cuenta las propiedades métricas, sólo algunas propiedades cualitativas de las figuras que se conservan bajo deformaciones de las superficies en las que se encuentran, sin desgarramiento ni superposición de las superficies.

Los conceptos básicos que sirven como introducción a la clasificación de superficies, se darán a continuación. Se dice que una superficie es *conexa* si cualesquiera dos de sus puntos se pueden unir por una trayectoria que esté totalmente contenida en ella. Se dice que una superficie es *cerrada* si no posee puntos frontera o puntos infinitos [52, 53]. Todas las superficies que se tratarán en este trabajo son conexas.

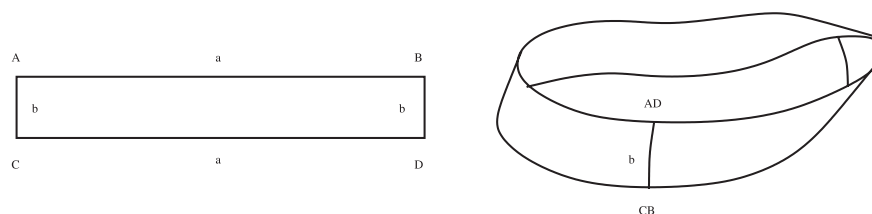


Figura 12.10: Banda de Möbius.

La esfera es una superficie 2-dimensional cerrada. Consideremos un rectángulo de papel, con lados  $a$  y  $b$ , donde la longitud de  $a$  es mayor que la de  $b$ , denotemos los vértices donde se intersectan los lados como  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , tal como aparecen en la figura 12.10.

1. Si se pegan los lados  $AB$  y  $CD$ , es decir se identifican los puntos  $A$  y  $C$  en un sólo punto y  $B$  y  $D$  en otro punto, se obtiene un cilindro, al cual se le llamará *asa*.
2. Si se pegan los lados  $AC$  y  $BD$ , habiendo girando el lado  $BD$  180 grados, de tal manera que se identifiquen los puntos  $D$  con  $A$  y  $B$  con  $C$ , se obtiene una interesante superficie, llamada *banda de Möbius*.

Se dice que dos superficies  $S$  y  $S'$  son *homeomorfas* si existe una biyección continua entre ellas. Ahora se está en condiciones de clasificar las superficies conexas y cerradas en orientables y no orientables. Sea  $S$  una superficie cerrada, se dice que  $S$  es *orientable* si no contiene una banda de Möbius. Se dice que  $S$  es *no orientable* si contiene una banda de Möbius.

La esfera  $S_E$  es orientable y si a  $S_E$  se le pegan algunas asas, la superficie obtenida tampoco contiene bandas de Möbius. Para pegar un asa a una esfera  $S_E$ , se le hacen dos pequeños agujeros y se pegan los extremos de un asa con los bordes de los agujeros. En general, una superficie cerrada orientable es homeomorfa a una esfera con  $g$  asas, para alguna  $g \geq 0$ . A esta superficie se le llama una *superficie orientable de género  $g$* . Para construir una superficie no orientable se pegan bandas de Möbius a una esfera  $S_E$ . Para pegar una banda de Möbius a  $S_E$ , se hace un pequeño agujero en  $S_E$ , se toma la banda y se pega su borde con el borde del agujero hecho a la esfera. Una superficie cerrada no orientable es homeomorfa a una esfera con  $h$  bandas de Möbius pegadas, para alguna  $h \geq 1$ . A ésta se le llama *superficie no orientable de género  $h$*  [53].

En la figura 12.11 se muestran dos ejemplos representativos de superficies, la primera es una esfera con dos asas, también llamada *dobles toro*, la cual es una superficie orientable y la segunda es una *botella de Klein*, la cual es una superficie no orientable, pues está formada por dos bandas de Möbius.

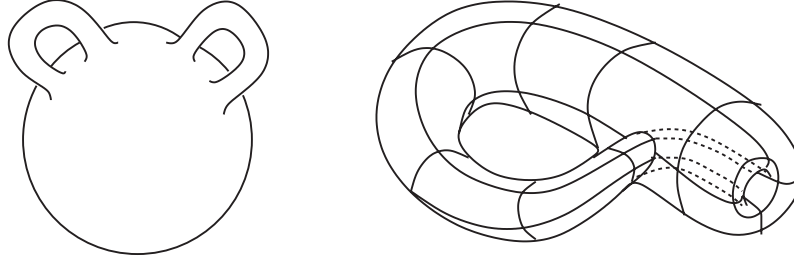


Figura 12.11: Doble toro y botella de Klein.

Diremos que un encaje de una gráfica en una superficie  $S$  es *simple* si cada una de sus caras es homeomorfa a un disco. No todos los encajes son simples. Por ejemplo, si se dibuja sobre un *toro* (es decir, una esfera con un asa) un pequeño disco y dentro de él un encaje de alguna gráfica aplanable  $G$ , la cara exterior de  $G$  no es un disco en el toro.

La fórmula de Euler se cumple para toda superficie  $S$ , es decir todo encaje de una gráfica  $G = (V, E)$  en  $S$  cumple la siguiente igualdad:

$$|V| - |E| + C = k(S), \quad (25)$$

donde  $k(S)$  es una constante que depende de la superficie en cuestión. Por ello, a  $k(S)$  se le llama la *característica de Euler* de la superficie  $S$ . La característica de Euler es un invariante topológico, pues dos superficies homeomorfas  $S$  y  $S'$  tienen la misma característica, es decir  $k(S) = k(S')$ . El siguiente teorema caracteriza a las superficies cerradas y conexas mediante la característica de Euler. Este teorema es una generalización de la fórmula de Euler [54].

**Teorema 12.3.7 (Poincaré).** *Suponga que un encaje simple de una gráfica en una superficie  $S$  tiene  $|V|$  vértices,  $|E|$  aristas y  $C$  caras.*

1. *Si  $S$  es una esfera con  $g$  asas, entonces*

$$|V| - |E| + C = 2 - 2g. \quad (26)$$

2. *Si  $S$  es una esfera con  $h$  bandas de Möbius, entonces*

$$|V| - |E| + C = 2 - h. \quad (27)$$

Sea  $G$  una gráfica. El *número cromático* de  $G$ , denotado  $\chi(G)$ , es el mínimo número de colores con los cuales se pueden pintar los vértices de  $G$ , de tal manera que los extremos de cada arista tengan siempre colores diferentes.

Sea  $S_g$  la superficie orientable de género  $g$ , es decir  $S_g$  es homeomorfa a una esfera con  $g$  asas. El *número cromático de  $S_g$*  denotado por  $\chi(S_g)$  es el máximo número cromático de cualquier gráfica que se pueda encajar en  $S_g$ .

La superficie  $S_0$  corresponde a la esfera y  $\chi(S_0) = 4$ . Para el toro  $S_1$ , Heawood [55] demostró que  $\chi(S_1) = 7$ . Para  $g > 0$ , Heawood probó que el número cromático de  $S_g$  cumple que

$$\chi(S_g) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor. \quad (28)$$

Al lado derecho de esta desigualdad se le conoce como la *fórmula de Heawood*.

Por último, se define el *género  $\gamma(G)$  de una gráfica  $G$*  como el mínimo número de asas que se deben agregar a una esfera para que  $G$  pueda ser encajada sobre la superficie que resulte. En la línea de investigación sobre encajes de gráficas en superficies y con base en la fórmula de Heawood, Ringel y Youngs [56] probaron el siguiente teorema que determina el género de una gráfica completa.

**Teorema 12.3.8** (Ringel y Youngs). *Para  $n \geq 3$ , el género de  $K_n$  está dado por*

$$\gamma(K_n) = \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rfloor. \quad (29)$$

Una consecuencia de este teorema es que la desigualdad (28) es en realidad una igualdad para todas las superficies cerradas excepto para la botella de Klein, para la que su número cromático es 6 (y no 7 como resultaría de aplicar la fórmula de Heawood). Una observación interesante es que si sustituímos  $g = 0$  en la fórmula de Heawood obtenemos 4, el cual es el número cromático de la esfera. Sin embargo, la demostración de Heawood no se aplica a este caso.

### 12.3.4. Problemas abiertos

El teorema de los cuatro colores fué demostrado en 1976 por Appel y Haken. Ante la dificultad de reconstruir la prueba computacional dada por estos autores, algunos matemáticos no se convencieron de que el teorema estaba demostrado. En 1997 apareció la demostración de Robertson, Sanders y Seymour. Ésta fué verificada en diciembre de 2004 por G. Gonthier de Microsoft Research y B. Werner de INRIA, así como por otros grupos de investigadores.

A pesar de ello, muchos matemáticos siguen soñando con dar una demostración más corta del famoso teorema y, de ser posible, independiente del uso de una computadora. Así se plantea como un problema abierto hallar una demostración más corta del teorema de los cuatro colores.

Para un problema relacionado, consideremos mapas sobre dos esferas, digamos la Tierra y la Luna. Cada *país* es una región homeomorfa a un disco sobre la Tierra. Además, cada país tiene una *colonia* sobre la Luna, la cual también es un disco. Deseamos colorear los países y sus colonias de modo que

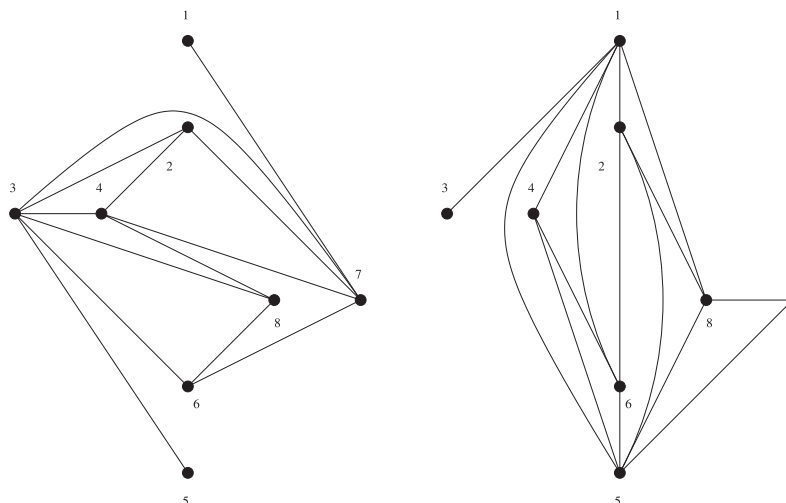


Figura 12.12: Una partición de  $K_8$  tipo Tierra y Luna.

1. cada país reciba el mismo color que su colonia y
2. si dos países o colonias tienen una frontera común entonces deben recibir colores distintos.

La pregunta es ¿cuál es el mínimo número de colores necesarios para colorear todos los mapas posibles de la Tierra y la Luna?

El problema se puede pensar en función de gráficas, asignando un vértice a cada país y su colonia y uniéndolos si los países o colonias correspondientes tienen una frontera común, como se hizo al plantear el teorema de los cuatro colores. Entonces la pregunta es ¿cuál es el máximo número cromático entre todas las gráficas que tienen una partición de sus aristas en dos gráficas aplanables, una en la Tierra y otra en la Luna?

Ringel observó que el mínimo número de colores necesario está entre 8 y 12 [57]. La gráfica completa  $K_8$  tiene una partición del tipo Tierra y Luna, como se muestra en la figura 12.12. En [58] se reporta que Sulanke halló la gráfica de tipo Tierra y Luna mostrada en la figura 12.13 con número cromático 9 y por lo tanto la respuesta a nuestra pregunta está entre 9 y 12. El hecho de que la cota superior para resolver este problema sea 12 se demuestra usando la fórmula de Euler [59].

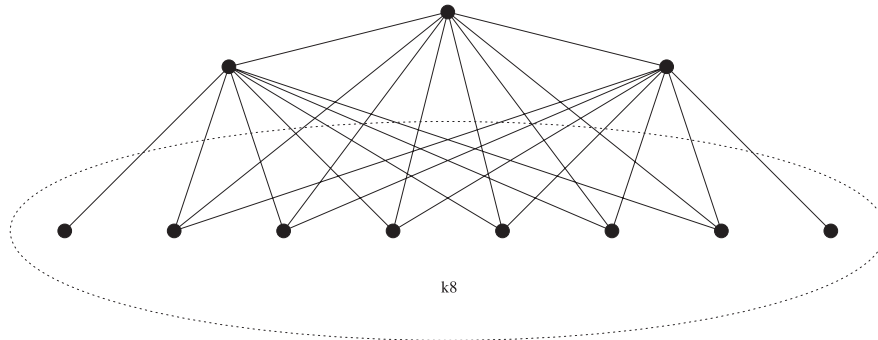


Figura 12.13: Un esquema de la gráfica de Sulanke.

## Agradecimientos

Este trabajo fué desarrollado bajo el auspicio de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco (proyectos de investigación de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería 2230116 y 2270314), del Programa de Mejoramiento del Profesorado de la SEP, del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (beca 69234) y del Sistema Nacional de Investigadores (beca 33694). El segundo autor desea agradecer a Gabriela Aceves de **gasdesign** por su dibujo a mano alzada de los puentes de Königsberg.



# Bibliografía

- [1] BONDY, J. A. Y MURTY, U. S. R., *Graph Theory with Applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [2] EULER, L., Solutio problematis ad geometrian situs pertinentis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **8**, 128–140, 1736.
- [3] DROR, M., editor, *Arc Routing. Theory, Solutions and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000.
- [4] AHR, D., A survey of arc routing problems, disponible en línea en el URL [www.informatik.uni-heidelberg.de/groups/comopt/mitarbeiter/ahr/research/overviewArcRouting/](http://www.informatik.uni-heidelberg.de/groups/comopt/mitarbeiter/ahr/research/overviewArcRouting/)
- [5] ASSAD, A. A. Y GOLDEN, B. L., Arc routing methods and applications, *Handbooks Oper. Res. Management Sci.*, **8**, 375–483, 1995.
- [6] EISELT, H. A., GENDREAU, M. Y LAPORTE, G., Arc routing problems I. The Chinese postman problem, *Oper. Res.*, **43(2)**, 231–242, 1995.
- [7] EISELT, H. A., GENDREAU, M. Y LAPORTE, G., Arc routing problems II. The rural postman problem, *Oper. Res.*, **43(3)**, 399–414, 1995.
- [8] GUAN, M. G., A survey on the Chinese postman problem, *J. Math. Res. Exposition*, **4(1)**, 113–119, 1984.
- [9] HIERHOLZER, C., Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren, *Mathematische Annalen*, **VI**, 30–32, 1873.
- [10] FLEISCHNER, H., *Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1. Vol. 1, Annals of Discrete Mathematics*, **45**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [11] FLEISCHNER, H., *Eulerian Graphs and Related Topics. Part 1. Vol. 2, Annals of Discrete Mathematics*, **50**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.

- [12] KÖNIG, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
- [13] FORD, JR., L. R. Y FULKERSON, D. R., *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [14] GUAN, M. G., Graphic programming using odd or even points, *Chinese Math.*, **1**, 273–277, 1960.
- [15] EDMONDS, J., The Chinese's postman problem, *Oper. Res. Bull.*, **13**, B–73, 1965.
- [16] EDMONDS, J., Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, **69B**, 125–130, 1965.
- [17] FLOYD, R. W., Algorithm 97: Shortest path, *Comm. ACM*, **5(6)**, 345, 1962.
- [18] BARAHONA, F., On some applications of the Chinese postman problem, en *Paths, Flows, and VLSI-Layout, Algorithms Combin.*, **9**, 1–16, Springer, Berlin, 1990.
- [19] EDMONDS, J. Y JOHNSON, E. L., Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Math. Programming*, **5**, 88–124, 1973.
- [20] EDMONDS, J. Y KARP, R. M., Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems, *J. ACM*, **19(2)**, 248–264, 1972.
- [21] PAPADIMITRIOU, C. H., On the complexity of edge traversing, *J. ACM*, **23(3)**, 544–554, 1976.
- [22] VEERASAMY, J., *Approximation Algorithms for Postman Problems*, tesis doctoral, The University of Texas at Dallas, 1999.
- [23] ZARAGOZA MARTÍNEZ, F. J., *Postman Problems on Mixed Graphs*, tesis doctoral, University of Waterloo, 2003.
- [24] ZARAGOZA MARTÍNEZ, F. J., Complexity of the mixed postman problem with restrictions on the arcs, *Third International Conference on Electrical and Electronics Engineering 2006*, 1–4, IEEE Electron Devices Society, USA, 2006.
- [25] ZARAGOZA MARTÍNEZ, F. J., Complexity of the mixed postman problem with restrictions on the edges, *Seventh Mexican International Conference on Computer Science*, 3–10, IEEE Computer Society, USA, 2006.
- [26] SZEKERES, G. Polyhedral decompositions of cubic graphs, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **8**, 367–387, 1973.

- [27] SEYMOUR, P. D., Sums of circuits, en *Graph Theory and Related Topics*, Academic Press, Nueva York, 341–355, 1979.
- [28] JAEGER, F., A Survey of the cycle double cover conjecture, en *Cycles in Graphs*, Ann. Discrete Math., **27**, 1–12, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [29] GODDYN, L. A., *Cycle Covers of Graphs*, tesis doctoral, University of Waterloo, 1989.
- [30] CELMINS, U. A., *On Cubic Graphs That do not Have an Edge 3-Coloring*, tesis doctoral, University of Waterloo, 1984.
- [31] PREISSMANN, M., *Sur les colorations des aretes des graphes cubiques*, tesis doctoral de tercer ciclo, Université Grenoble, 1981.
- [32] JAEGER, F., Nowhere zero flow problems, en *Selected Topics in Graph Theory 3*, Academic Press, London, 71–95, 1988.
- [33] ARCHDEACON, D., Face coloring of embedded graphs, *J. Graph Theory*, **8**, 387–398, 1984.
- [34] SABIDUSSI, G., Conjetura 2.4 en *Cycles in Graphs*, Ann. Discrete Math., **27**, 462, North Holland, Amsterdam, 1985.
- [35] ZARAGOZA MARTÍNEZ, F. J., Feasibility of the mixed postman problem with restrictions on the edges, **29**, 79–83, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2007.
- [36] WILSON, R., Read Euler, read Euler, he is the master of us all, disponible en línea en el URL <http://plus.maths.org>, 2007.
- [37] KURATOWSKI, K., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15**, 271–283, 1930.
- [38] BERGE, C., *The Theory of Graphs and Its Applications*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1962.
- [39] LIU, C. L., *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968.
- [40] MAY, K. O., The origin of the four-color conjecture, *Isis*, **56**, 346–348, 1965.
- [41] CAYLEY, A., On the colouring of maps, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **9**, 148, 1878.
- [42] KEMPE, A. B., On the geographical problem of four colors, *Amer. J. Math.*, **2**, 193–204, 1879.

- [43] APPEL, K. L. Y HAKEN, W., Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.*, **21**, 429–490, 1977.
- [44] APPEL, K. L., HAKEN, W. Y KOCH, J., Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.*, **21**, 491–567, 1977.
- [45] APPEL, K. L. Y HAKEN, W., *Every Planar Map Is Four Colorable*, AMS Contemp. Math., **98**, 1989.
- [46] ROBERTSON, N., SANDERS, D. P., SEYMOUR, P. D. Y THOMAS, R., The four color theorem, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, **70**, 2–44, 1997.
- [47] MATOUŠEK, J. Y NEŠETŘIL, J., *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 1998.
- [48] HARARY, F., *Graph Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
- [49] PLATÓN, *Diálogos*, Editorial Gredos S. A., 2000.
- [50] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M., *Pitágoras. El filósofo del número*, Nivola Libros y Ediciones S. L., 2001.
- [51] FRÉCHET, M. Y FAN, K., *Introducción a la Topología Combinatoria*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1959.
- [52] FULTON W., *Algebraic Topology. A First Course*, Graduate texts in mathematics, Springer Verlag, New York, 1995.
- [53] MASSEY W., *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate texts in mathematics, **127**, Springer Verlag, New York, 1991.
- [54] CAMERON, P., *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1994.
- [55] HEAWOOD, P. J., Map Colour Theorems, *Quart. J. Math.*, **24**, 332–338, 1890.
- [56] RINGEL, G. Y YOUNGS, J. W. T., Solution of the Heawood map-coloring problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **60**, 438–445, 1968.
- [57] RINGEL, G., *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*, VEB Deutsche Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
- [58] GARDNER, M., Mathematical Games, *Scientific American*, **242**, 14–19, 1980.
- [59] HUTCHINSON, J. P., Coloring ordinary maps, maps of empires, and maps of the Moon, *Mathematics Magazine*, **66(4)**, 211–226, 1993.

# Índice alfabético

$\pi$  y los números primos, 120

Abel, 42

adición de Euler, fórmula de, 46

algebraicas, problema de las curvas, 46

algebraicas, soluciones, 44

Apéry, 117

árbol, 318

arco, 309, 310

arista, 305, 310

asa, 324

banda de Möbius, 324

Bernoulli, 116

botella de Klein, 324

camino, 306

    dirigido, 309

    euleriano, 307

    mixto, 310

cantidad de movimiento, 73

cara, 317

    exterior, 317

centros fijos, 21

centros fijos, soluciones, 40

ciclo, 313

circuito, 306

    dirigido, 309

    euleriano, 309

    euleriano, 307

    mixto, 310

concepto de función, 250

conjunto

    saliente, 315

conservación de la masa, 71

constante  $\gamma$  de Euler, 116

constante de Apéry, 117

constante de Euler, 258

de La Vallée Poussin, 124

De Moivre, 127

derivada material, 71

descripción Euleriana, 69

descripción Lagrangiana, 69

Dirichlet, 121

distribución de ceros, 282

doble toro, 324

duplicación de Fagnano, fórmula de, 46

Ecuación de Bernoulli, 78

ecuación funcional de  $\zeta$ , 125

Ecuaciones de Euler, 76

elípticas, coordenadas, 58

elíptico, movimiento, 37

Elementos de Euclides, 114

encaje, 317

    simple, 325

exceso, 315

extremo, 306

fórmula de Euler, 257

fórmula de reconstrucción, 265

Fagnano, 43

fórmula de Euler, 317

fórmula de Heawood, 326

función  $\zeta(s)$ , 113

- función Beta, 292  
función exponencial, 278  
función Gama, 289  
función zeta de Riemann, 124  
funciones analíticas, 124  
funciones de Tchevyshev, 122  
funciones trascendentes, 250
- Gauss, 122
- grado, 306  
    externo, 309  
    interno, 309
- gráfica, 305  
    aplanable, 317  
    bipartita, 318  
        completa, 319  
    completa, 318  
    conexa, 306  
    dirigida, 309  
        conexa, 309  
        euleriana, 309  
    euleriana, 307  
    género, 326  
    mixta, 310  
        conexa, 310  
        euleriana, 310  
    plana, 317  
    serie paralelo, 315
- Hadamard, 124  
Hamilton–Jacobi, 57  
hiperbólico, movimiento, 29  
homeomorfo, 319
- identidad fundamental, 115  
incidencia, 305, 309, 310  
integral de Euler, 25  
integral elíptica, 42  
irracionalidad de  $e$ , 116
- Jacobi, solución de, 57
- kernel, 267
- líneas de corriente, 80  
Lambert, 130  
lazo, 306  
Legendre, 121  
Leibnitz, 116  
lemniscata, 42  
Lindeman, 133  
Liouville, 128
- Mangoldt, 124  
Mascheroni, 118  
Mengoli, 116
- número imaginario, 276  
números algebraicos, 131  
Navier-Stokes, 83  
número cromático, 325
- obstrucción, 318  
Oresme, 116  
orientación, 314
- Paradoja de Euler-D'Alembert, 81  
poliedro, 317  
    regular, 320  
    simple, 320  
polinomio simétrico, 134  
polinomios de Bernoulli, 136  
Problema de Basilea, 116, 117  
progresión aritmética, 121  
puente, 314
- Riemann, 124  
ruta de cartero, 311
- serie armónica, 116  
serie trigonométrica, 260  
subdividir, 319  
subgráfica, 319  
superficie, 323  
    característica, 325  
    cerrada, 323  
    conexa, 323

género, 324  
no orientable, 324  
orientable, 324

Tchevyshev, 122  
teoría analítica de números, 113  
Teorema de los Números Primos, 115  
teorema fundamental de la aritmética, 114  
toro, 325  
transformada del wavelet, 264  
trascendencia de  $e$ ,  $\pi$  y  $\zeta(2k)$ , 116

vértice, 305, 309, 310  
Viète, 135

Wallis, 116  
Wallis, producto de, 42  
Weil, 118

Esta obra se terminó de imprimir en octubre de 2007  
En los talleres de Ultradigital Press, S.A. de C.V.  
Centeno 162 – 3, Col. Granjas Esmeralda  
C.P. 09810, México.